

И. КЕИС

УДК 531.36; 62—50

## О СУБОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СПОСОБОМ ОБРАЩЕНИЯ И АГРЕГАЦИИ

(Представлена Н. Алумяз)

Для управляемой динамической системы предложены два критерия стабилизации. Методом производящих функций и агрегирующих переменных  $y$  доказана теорема о субоптимальном синтезе  $u(t, x, a)$ . Получены условия минимизации показателя для выбора  $a$ . Приводится пример.

1. Рассмотрим уравнения возмущений  $x \equiv 0$  управляемой системы  $x' = F(t, x, u)t, x \in R = \{t \geq 0, |x| < \infty\}, F(t, 0, 0) \equiv 0, F \in C_1(R \times \Omega),$  (1.1)  
 $u = (u_\sigma)^* \in U^0 = \{u \in \Omega \subseteq E^s, u \in C_1(R')\}, R' = R_0 \setminus x' = 0, R_0 = R \setminus |x^1| > H_0,$

$x = (x_v, x_h)^*, x^1 = (x_v)^*, x^{(2)} = (x_h)^*, v = \overline{1, m_1} \leq \dim x = n, h = \overline{m_1 + 1, n},$

$x^1 = (x_\alpha, x_\beta)^*, x' = (x_\alpha)^*, x'' = (x_\beta)^*, \alpha = \overline{1, m_0} \leq m_1, \beta = \overline{m_0 + 1, m_1}$

с компактом  $\Omega$ , целью  $Q = \{x | x' = 0\}$  и критерием

$$J(t, x | u) = \int_t^{t_1} F_0(\tau, x, u) d\tau \rightarrow \min_u (\lim_{t \rightarrow t_1 - 0} x' = 0, F_0 \in C_1), \quad (1.2)$$

где  $F, U^0$  удовлетворяют условиям существования, единственности и продолжаемости  $x[t]$  на  $t \in [t_0, t_1), x \in R', t_1$  — первый момент примыкания  $x$  к  $Q$  в (1.2). Регулятор  $u' \in U^0 - x^1, x'$ -стабилизирующий (1.1), если имеем  $|x^1| \leq \varepsilon' \leq H_0 (t \in [t_0, t_1]), x'[t] \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_1 - 0, \forall |x'_0| \leq \delta'_0 \leq \delta_0^1 = \text{const}$ , где  $\forall \varepsilon > 0$ , фиксируются  $t_0 \geq 0, |x_0^{(2)}| < \infty, H_0 = \text{const} > 0$  и существует  $\delta_0^1 = \delta_0^1(t_0, x_0^{(2)}, \varepsilon') \geq |x_0^1| > 0$ . Используются [1] обозначения  $x_0 = x[t_0], x'_0 \neq 0, |x_0''| < \delta_0^1, x[t] = x(t, t_0, x_0 | u')$ . Допустимый  $u^0$  из класса  $\{u'\} \in U^0$  — оптимальный для (1.1) по (1.2), если  $J(t, x | u^0) \leq J(t, x | u')$  при  $|x_0^1| \leq \delta_0^1, 0 < |x'_0| \leq \delta'_0, (t_0, x_{h_0}^{(2)}, H_0)^* = \text{fix const}$ . Введем для стабилизации и наблюдаемости переменные

$$y = y(t, x, a) = (y_i)^* = (y'_j, y''_d)^* (i, l = \overline{1, l_0} \leq n, j = \overline{1, l_1}, d = l_1 + 1, l_0), \quad (1.3)$$

$$y' = (y'_j)^*, y'' = (y''_d)^*, y|_{x=0} \equiv 0, y'|_{x=0} \equiv 0 (r^1 = |x^1|, r' = |x'|, l_0 \leq n),$$

$$\text{rank } \|\partial y_i / \partial x_l\| = l_0, y \in C(R_0 \times A), y \in C_1(R' \times A), |y| = \varrho \geq \varrho_1 (r^1, a) \gg 0,$$

$$|y'| = \varrho' \geq \varrho'_1 (r', a) \gg 0, \varrho_1(\xi_2, a) \geq \varrho_1(\xi_1, a), \varrho'_1(\xi_2, a) \geq \varrho'_1(\xi_1, a) (\xi_2 > \xi_1),$$

$$\varrho_1(0, a) = \varrho'_1(0, a) = 0, \varrho_1(\xi, a) \geq \varrho'_1(\xi, a) > 0, \xi > 0, \varrho_1, \varrho'_1 \in C(R_0 \times A),$$

где агрегаты  $y_i$  — вообще нелинейные по  $x$ , а связи Четаева с вектором [2, 3] агрегации  $a = (a_m)^*$  из области  $A \subseteq E^N$ ,  $a = \text{const}$ ,  $m = \overline{1, N}$ .

В силу (1.3) для  $\forall h \leq \rho_1(H, a) = \max \rho_1(|x^1| \leq H_0) |y| \leq h$  отвечает прообраз в  $|x^1| \leq \delta(\rho_1(\delta, a) = h_\delta)$ , из  $|y'| \rightarrow 0$  следует  $|x'| \rightarrow 0$ . Для  $\forall (t, x_h)^*$ ,  $a = \text{fixconst} \in A$  область  $\{y\}$  содержит  $|y| \leq h$ . Поэтому для оптимальной  $x^1$ ,  $x'$ -стабилизации (1.1), (1.2) достаточно решить в переменных  $\xi$  задачу оптимизации

$$\xi' = f(t, \xi, u, a), \quad \xi \in D' = \xi(R'), \quad f(t, 0, 0, a) \equiv 0 \quad (D' = D \setminus y' = 0), \quad (1.4)$$

$$y' = Y(t, \xi, u, a), \quad \gamma' = \Gamma(t, \xi, u, a) \quad (\gamma_h \equiv x_h, \quad x_l = \eta_l(t, \xi, a) \in C_1(D' \times A)),$$

$$Y = \partial y / \partial t + F \cdot \partial y / \partial x, \quad \Gamma = (F_k)^* | x_l = \eta_l \quad (l = \overline{1, l_0}, \quad k = \overline{l_0 + 1, n}),$$

$$I = \int_t^{t_1} f_0 d\tau \rightarrow \min_u, \quad f_0 = F |_{x=x(t, \xi, a)} \in C_1(D' \times \Omega \times A)$$

при условии  $y, y'$ -стабилизации (1.4)  $I$ -оптимальным  $u^1(t, \xi, a)$ , где  $|y| \leq h \leq H$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ),  $\lim y' = 0$  при  $t \rightarrow t_1 - 0$  ( $\forall |y_0| \leq \delta$ ,  $H = \text{fixconst}$ ). Пусть (1.4) имеет в  $U^0$  подкласс возможных  $u'$ , порожденных  $V(t, \xi, a)$  вида

$$V(t, \xi, a) \geq V_1(\rho, a) > V|_{y=0} \equiv 0, \quad \rho \neq 0 \quad (0 \ll V_1 \in C([0, H] \times A)), \quad (1.5)$$

$$-V'|_{u=u'} = W(t, \xi, a) \geq 0, \quad y' \neq 0, \quad |y| \equiv \rho \leq H, \quad \forall a \in A, \quad \xi \in D'_0,$$

$$D_0 = D \cap \{|y| \leq H\}, \quad D'_0 = D \setminus y' = 0, \quad D = \xi(R_0), \quad t \geq 0, \quad W \subset C(D'_0 \times A).$$

Из (1.3), (1.5) для (1.4) при  $u = u' \in U^0$  имеем  $y, y'$ -устойчивость

$$\forall \varepsilon \leq H \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, \gamma_0, a) | V : |y| \leq \varepsilon (t \in [t_0, t_1]), \quad \forall |y_0| \leq \delta \leq H, \quad (1.6)$$

$$\forall \varepsilon \leq H \exists \delta' = [\delta^2 - |y_0''|^2]^{1/2} \leq \delta : |y'| \equiv r \leq \varepsilon (\delta^0 \equiv \delta(H), \quad \delta'^0 = \delta'(H)).$$

Остальные свойства  $V, U', f(u')$ , достаточные для  $y' \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow t_1 - 0$  и фиксированных  $t_0, y_0'', \gamma_0, \delta^0, \delta'^0$ , доопределим ниже. Допустим противное: в области  $D'_0$  (1.5) системы (1.4) есть  $\xi_*[t]$  с  $y_*'[t]$ -компонентой, не сходящейся к нулю при  $r_0 = r[t_0] \leq \delta'$  и  $\forall t_1 \leq +\infty$  ( $r_0 > 0$ ,  $t_1 > t_0$ ). Из (1.6) следует, что  $r_* \equiv |y_*'|$  удовлетворяет условиям, задающим лишь два класса (1.7), (1.8)  $\{r_*[t]\}$  функций вида  $C_*^1, C_*^{(2)}$

$$\lim r_* = l^0 \leq H (t \rightarrow +\infty, \quad 0 < l^0), \quad \exists \tau_n \rightarrow +\infty, \quad r_{*n} \rightarrow l^0 : r_{*n} \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

$$r_{*n} = r_*[\tau_n], \quad r'_{*n} = dr_*/dt |_{t=\tau_n}, \quad 0 < r_*[t] \subset C_1[t_0, \infty), \quad C_*^1 = \{r_*[t]\},$$

$$\underline{\lim} r_*[t] = l^1 < l^{(2)} = \overline{\lim} r_*[t] (t \rightarrow +\infty, \quad 0 \leq l^1 < l^{(2)} \leq H)$$

$$(0 < r_* \subset C_1[t_0, \infty)), \quad (1.8)$$

$$\exists \tau'_k \rightarrow +\infty, \quad r'_{*k} \rightarrow l^1 : r'_{*k} = 0 (r'_{*k} = r_*[\tau'_k]), \quad \tau'_k < \tau''_k < \tau'_{k+1} < \tau''_{k+1},$$

$$\exists \tau''_k \rightarrow +\infty, \quad r''_{*k} \rightarrow l^{(2)} : r''_{*k} = 0 (r''_{*k} = r_*[\tau''_k]), \quad n, k = \overline{1, \infty}, \quad C_*^{(2)} = \{r_*[t]\},$$

$$\forall l^* \in (l^1, l^{(2)}) \exists \tau^*_k \rightarrow +\infty : r_*[\tau^*_k] = l^*, \quad r_*[t] \rightarrow [l^1, l^{(2)}] (t \rightarrow +\infty),$$

$$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \exists T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : l^1 - \varepsilon_1 < r_*[t] < l^{(2)} + \varepsilon_2, \quad t \geq T \geq t_0 \geq 0.$$

Для  $\forall r_*[t] \in C_*^{(2)}$  имеем последовательности  $(\tau'_k, r'_{*k}) \rightarrow (\infty, l^1)$ ,  $(\tau''_k, r''_{*k}) \rightarrow (\infty, l^{(2)})$  ( $l^1 < l^{(2)}$ ) стационарных  $r_* = 0$  точек  $r_*[t]$  — «экстремумов» ее колебаний. В классе  $C_*^{(1)}$  возможны постоянные и моно-

тонные функции, которых класс  $C_*^{(2)}$  не имеет. Функция  $r[t] \in C_*^1 \cup C_*^{(2)}$ , если нет  $(t_n, r_n)^* \rightarrow (+\infty, l)^*$  с  $r_n \rightarrow 0$  ( $l > 0, r_n = r[t_n]$ ).

Введем совокупность  $P = \{(\infty, r^*)^*\} \subset \bar{D}_0'$  ( $0 < r^* \leq H$ ) предельных для  $\rho_m^* = (t_m^*, r_m^*)^*$  точек со свойствами:  $t_m^* \rightarrow \infty, r_m^* \rightarrow r^*, R_m^* \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ , где  $r_m^* = |y_m'^*|, R = r, R_m^* = R(t_m^*, \xi_m^*, a|u')$ .  $P$  — множество  $r$ -агрегированных и предельных к  $t_m^* \rightarrow +\infty, \xi_m^* (r_m^* \rightarrow r^* > 0)$  точек в  $D_0'$ , на которых  $r_m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty$ . Из (1.7), (1.8) следует, что  $P$  непусто, если на  $D_0'$  имеем  $\{r_*[V]\} \neq \emptyset$ .  $P \cup 0$  — замкнуто. При  $t_m \rightarrow +\infty, r_m \rightarrow r \in [0, H]$  вообще  $R_m \not\rightarrow 0$ . Но для элементов  $\rho_n, \rho_n', \rho_n''$  имеем

$$R_n = r_n \rightarrow 0 \text{ при } t_n = \tau_n, \tau_n', \tau_n'', r_n = r_{*n}, r_{*n}', r_{*n}'' (r_n \rightarrow r), \quad (1.9)$$

ибо их пределы лежат в  $P \cup 0$ . Пусть для  $\forall r^* \in (0, H]$  существуют  $\varepsilon^* = \varepsilon_*(r^*) > 0, T^* = T_*(r^*) \geq 0, \omega^* = \omega_*(r^*) > 0$ , удовлетворяющие оценке

$$W \geq \omega^* > 0, t \geq T^*, |r - r^*| \leq \varepsilon^*, \forall \xi \in D_0', t < \infty, a \in A. \quad (1.10)$$

Пусть в  $B = \{t \geq T^*, |r - r^*| \leq \varepsilon^*, \xi \in D_0'\}$  имеем неравенства

$$-R_1(t, r^*, a) \leq r|_{u=u'} = R(t, \xi, a|u') \leq R_2(t, r^*, a) \quad (0 \leq R_1, R_2 \subset C) \quad (1.11)$$

с неотрицательными интегрируемыми на  $[T^*, \infty)$  функциями  $R_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ). Обозначим через  $T_1^-, T_2^-, T_1^+, T_2^+$  решения уравнений

$$\int_{-T^-}^0 R_1(t+\tau) d\tau = \varepsilon_-^* = \int_{-T^-}^0 R_2(t+\tau) d\tau \quad (T_\alpha^- = T_\alpha^-(t, \varepsilon_-^*) > 0, \alpha = 1, 2), \quad (1.12)$$

$$\int_0^{T^+} R_1(t+\tau) d\tau = \int_0^{T^+} R_2(t+\tau) d\tau = \varepsilon_-^* = \varepsilon^* - \varepsilon_+ > 0 \quad (T_\alpha^+ = T_\alpha^+(t, \varepsilon_-^*)),$$

дающие оценки снизу левого, правого и полного отрезков времени включения  $r_*[t] \in B$  для начального  $r_*[t]$  из  $|r_*[t] - r^*| \leq \varepsilon_*$ :

$$\Delta t^- \geq \Delta t_1^- = \min\{t - T^*, T_1^-, T_2^-\} \equiv T^-(t, \varepsilon_-^*), T_0^* = T^- + T^+, \quad (1.13)$$

$$\Delta t^+ \geq \Delta t_2^+ = \min\{T_1^+, T_2^+\} \equiv T^+(t, \varepsilon_-^*), \Delta t = T_0^*(t, \varepsilon_-^*).$$

Пусть для любой последовательности  $t_k \rightarrow \infty, 0 < t_k < t_{k+1}$  ряд

$$S_m^* = \sum_{k=1}^m T_0^*(t_k | \varepsilon_-^*) \quad (\varepsilon_* = \varepsilon_*(t_k) \rightarrow 0, 0 < \varepsilon_-^* = \varepsilon^* - \varepsilon_*, k, m \rightarrow \infty), \quad (1.14)$$

$$S^* = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m^* = +\infty$$

расходится при  $m \rightarrow \infty, \forall \varepsilon_*$  и  $\varepsilon^* > \varepsilon_* \geq 0$  в оценках (1.10), (1.11).

*Лемма 1. Возможный регулятор  $u'(t, \xi, a)$  будет  $x^1, x'$ -стабилизирующим (1.1) для  $t_0 = \text{fixconst} \geq 0, |x_0^1| \leq \delta_0^1, x_0^{(2)}$ , если функции  $V, u'$  удовлетворяют условиям (1.5), (1.10), (1.11), (1.14) для  $\forall a \in A$ .*

*Доказательство.* С учетом (1.5), (1.6) достаточно показать при условиях леммы отсутствие решений  $\xi_*[t]$  с  $r$ -компонентой для системы (1.11). Допустив противное, рассмотрим  $r_*[t]$ , для которой в силу (1.7) — (1.9) есть  $\tau_k^* \rightarrow +\infty$  со свойствами

$$r[\tau_k^*] \equiv r_{*k} \rightarrow r^*, dr_*/d\tau_k^* \rightarrow 0 \quad (0 < r^* \leq H, \tau_k^* < \tau_{k+1}^*, k = \overline{1, \infty}), \quad (1.15)$$

$$\forall \varepsilon_* > 0 \exists T_* \leq \tau_n : |r_*[\tau_n] - r^*| \leq \varepsilon_* < \varepsilon^* \quad (\{\tau_n\} \subseteq \{\tau_n^*\}, n \rightarrow \infty).$$

Интегрируя вдоль  $\xi_*[t]$  при  $u = u'$  равенство  $V' = -W$ , с учетом (1.10)–(1.15) имеем неравенства

$$V[t_0] - V[\infty] = \int_{t_0}^{\infty} W[\tau] d\tau \geq \omega^* S^* = \infty \quad (V[t_0] \geq V[\infty] \geq 0) \quad (1.16)$$

в силу их противоречия  $\{r_*[t]\} = \emptyset$ . Лемма доказана.

**З а м е ч а н и я.** Для  $r$ -агрегированной предельной точки  $r^* = H$  функция  $T_0^*(t, \varepsilon_*)$  имеет вид  $T_1^+ + T_0^-$  ( $T_0^- = \min\{t - T_H^*, T_2^-\}$ ,  $T_0^* = -T_1^+$  ( $R_2 = \infty$ ),  $T_0^-$  ( $R_1 = \infty$ )). Если  $P = \emptyset$  для  $u'$ -произведенной  $V$  вида (1.5), то  $\emptyset = \{r_*[t]\}$  и  $u'(t, \xi, a) = x^1, x'$ -стабилизирующий (1.1) регулятор. Условия леммы 1 ослабляются заменой на положительно рекуррентное, предельно  $r$ -стационарное множество  $P_0 \subseteq P$ . Точка  $p_0$  входит в  $P_0 = \{(\infty, r_0^*)\}$ , если для (1.1) ( $u = u'$ ) существует последовательность  $\tau_k \rightarrow +\infty$  со свойствами

$$|R(\tau_k, \xi[\tau_k], a|u')| \downarrow 0, \quad r[\tau_k] \equiv |y'[\tau_k]| \rightarrow r_0^* \in (0, H),$$

где  $0 < r[t] \leq H$  при  $|y_0| \leq \delta^0$ ,  $0 < |y'_0| \leq \delta'^0 \leq \delta^0$ ,  $t_0 \geq 0$ ,  $\gamma_0 \in E^{n-l_0}$ ,

$$f[t] = f(t, t_0, y_0, \gamma_0, a|u), \quad (t_0, \gamma_0, a)^* = \text{fixconst.}$$

Установим второй критерий  $x^1, x'$ -стабилизации (1.1) при  $u = u'$ . Примем, что функция  $r[t]$  при  $u = u'$ ,  $\xi \in D_0'$ ,  $t \geq 0$ ,  $\forall a \in A$  удовлетворяет дифференциальным неравенствам

$$|r'| \equiv |R| \leq R_1(t, r, a) \quad (0 < R_1 \in C(B^1), \partial R_1 / \partial r \in C(B^1)), \quad (1.17)$$

где  $B^1 = \{0 \leq t < \infty, 0 < r \leq H\}$ ,  $\forall a \in A$ .

Пусть все  $r_1 \rightarrow +\infty$ -продолжаемые решения  $r_1' = -R_1$  и верно

$$\lim r_1[t] > 0, \quad t \rightarrow +\infty \quad (\forall t_0, r_{10} \in B^1, a \in A). \quad (1.18)$$

На  $B^1$  для системы (1.4) при  $u = u'$  предположим свойства:

$$-V|_{u=u'} \equiv W \geq W_1(t, r, a) \geq 0 \quad (W_1, \partial W / \partial r \in C(B^1), \forall a \in A), \quad (1.19)$$

$$\omega_1 \equiv \partial W_1 / \partial r \geq 0, \quad t, r \in B^1, \Delta^+ \omega|_{t^0, r^0} \equiv \omega|_{t^0 + \Delta t} - \omega(t^0, r^0) > 0 \quad (0 < \Delta t \leq \varepsilon),$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^T W_1(\tau, r_1[\tau], a) d\tau = \infty, \quad r_{10}, t_0 \in B^1, \forall a \in A \quad (\forall t^0, r^0 \in \{\omega_1 = 0\} \cap B^1).$$

Покажем, что  $\xi_1[t] \equiv -1$ ,  $r_1[t]$  — оптимальное решение задачи

$$r = \xi R_1, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad \xi \in C[t_0, T] \quad (0 \leq t_0 < T < \infty), \quad (1.20)$$

$$0 < r[t] \leq H = \text{fixconst}, \quad t_0 \leq t < T \quad (r_0 = r[t_0] > 0, 0 < r[T] \leq H),$$

$$I_1(t_0, r_0, T, a|\xi) = \int_{t_0}^T W_1(\tau, r[\tau], a) d\tau \rightarrow \min_{\xi} = I_1(\xi^0).$$

Из (1.17), (1.20) и  $\omega_1 \geq 0$  находим  $r_1[t] \leq r[t|\xi]$ ,  $I_1(\xi_1) \leq I_1(\xi)$  ( $t \in [t_0, T]$ ,  $\xi_1 \equiv -1$ ,  $\forall \xi[t] \geq \xi_1[t]$ ,  $\xi \in C$ ) — оптимальность  $\xi_1$ . Для (1.20) имеем необходимые условия

$$H_1(t, r_1, p_1, \xi_1, a) \leq H_1(t, r_1, p_1, \xi, a),$$

$$p_1 \xi_1 = \min p_1 \xi = -p_1 < 0 \quad (H_1 = W_1 + p_1 \xi R_1),$$

$$p_1' = (\partial R_1 / \partial r_1) p_1 - \partial W_1 / \partial r_1, \quad p_1[T] = 0 \quad (p_1 = \int_t^T \Phi_1(t, \tau) \omega_1^1(\tau) d\tau, \quad t_0 \leq t \leq T),$$

$$\Phi_1 = \exp \int_{\tau}^t \partial R_1 / \partial r_1 d\xi, \quad r_1 = r_1[\xi], \quad \omega_1^1 = \partial W_1 / \partial r_1 = \omega_1^1(\tau, r_1[\tau], a) \geq 0,$$

где  $p_1 > 0$  на  $[t_0, T]$  в силу локальной неинвариантности  $\{\omega_1 = 0\}$  вдоль  $r_1[t]$  при (1.19). Тогда согласно (1.20) и  $|r_*| \leq R_1(r_*)$  аналогично лемме 1 получаем из  $I_1(r_1) \leq I_1(r_*)$  доказательство леммы 2.

Лемма 2. Регулятор  $u'$  дает  $x^1, x'$ -стабилизацию (1.1), если функции  $V, u'$  удовлетворяют условиям (1.5), (1.17) — (1.19).

2. Зададим  $u^+(t, \xi, a | S^+, \lambda^+) \in U'$  потенциалом  $S^+(t, \xi, a) \geq 0$  и штрафом  $\lambda^+(t, \xi, a, u) \geq 0$  задачи обращения аналитического конструирования:

$$\begin{aligned} J^+(t, \xi, a | u, \lambda^+) &= \\ &= \int_t^{t^1} \lambda^+ f_0 d\tau (S^+, \lambda^+ \in C(D_0 \times \Omega), \lambda^+, S^+ \in C_1(D'_0 \times \Omega), \forall a \in A), \quad (2.1) \\ J^+(u, \lambda^+) &\rightarrow \min_u \\ &= S^+(t^1 = \min t^* : y'[t^*] = 0, 0 < |y'| \leq H, 0 < |y| \leq H, t < t^1). \end{aligned}$$

Пусть для  $S^+, \lambda^+ \exists V^+, u^+$ , удовлетворяющие лемме 1 или 2, причем

$$H^+(t, \xi, u, a) > H^+(t, \xi, u^+, a), \quad u^+ \neq u \in \Omega (H^+ = \lambda^+ f_0 + \partial S^+ / \partial t + f \cdot \partial S^+ / \partial \xi), \quad (2.2)$$

$$H^+(t, \xi, u^+, a | S^+, \lambda^+(u^+)) \equiv 0,$$

$$t \geq 0, \xi \in D'_0, \forall a \in A (H(t, \xi, u, a | S^+, \lambda^+) \equiv H^+),$$

$$S^+|_{y'=0} = 0, \quad u^+ = u'_+(t, \xi, a) \in C(t \geq 0, \xi \in D'_0), \quad \lambda^+, S^+ \in C_1(t \geq 0, D'_0 \times \Omega), \quad \forall a \in A.$$

Тогда имеем  $x^1, x'$ -стабилизацию (1.1) ( $u = u_+(t, x, a) = u'_+[t, \xi(t, x, a), a]$ ), существование, единственность и непрерывность  $u^+$ , строго минимизирующего  $H^+$  в  $\Omega$ .

Теорема. Регулятор  $u'_+$  оптимально по (2.1)  $y, y'$ -стабилизирует (1.4) в области (1.6) для значений  $t_0, \xi_0 \in C^0 = \{t_0 \geq 0, \xi_0 \in D'_0, |y_0| \leq \delta^0\}$  ( $a \in A$ ), если для  $S^+, \lambda^+, u'_+$  выполнены условия (2.2) и леммы 1 или 2.

Доказательство. Из выполнения условий леммы 1 или 2 следует  $y, y'$ -стабилизация (1.4) при  $u = u'_+(t, \xi, a)$ . Интеграцией неравенств (2.2) из краевого условия на  $S^+(t, \xi, a)$  для  $u'_+$  и стабилизирующего  $u_* \neq u'_+$  получаем неравенства

$$S^+(t, \xi, a) = \int_t^{t^1} \lambda^+(u'_+) f_0(u'_+) d\tau < J^+(u_*, \lambda(u_*)) = \int_t^{t^1} \lambda^+(u_*) f(u_*) d\tau,$$

означающие единственность минимизирующего (2.1) регулятора  $u'_+$ .

Теорема доказана. Поскольку  $\lambda^+ \neq 1, u'_+$  — субоптимальный регулятор [3] системы (1.4) на  $C^0$ .

Замкнем систему (1.1), (1.2) с плоскостью цели  $Q$  субоптимальным, стабилизирующим ее локально при  $\forall a \in A$  регулятором  $u_+(t, x, a)$ :

$$x' = \Phi(t, x, a), \quad t, x \in \{t \geq 0, x(D'_0), Q \leq H\} (x = x(t, \xi, a), a \in A), \quad (2.3)$$

$$a' = 0, \quad Q = \{x | x' = 0\} (u_+ = u'_+(t, \xi(t, x, a), a), \quad \Phi = F(t, x, u_+)),$$

$$J_+(t_0, x_0, a) =$$

$$= J(t_0, x_0 | u_+) = \int_{t_0}^{t^1} \Phi_0(\tau, x, a) d\tau (\Phi_0 = F_0(\tau, x, u_+), \quad t^1 = T_1(t_0, x_0, a) \neq t_1),$$

$$x_0 = x[t_0] = x(t_0, \xi_0, a), \quad x'_1 = x'[t^1] = 0 (t^1 = \min t^* : \lim x'[t] = 0, \quad t \rightarrow t^* - 0), \\ t_0 = \text{fixconst} \geq 0, \quad \xi_0 \in D'_0, \quad |y_0| \leq \delta^0, \quad |y'_0| \leq \delta^0_0 (t^1 = \min t^* : \lim y'[t] = \\ = 0, \quad t \rightarrow t^* - 0).$$

Для (2.3) рассмотрим минимизацию  $J_+$  по  $a$  при фиксированных  $t_0, x_0$  и условиях  $\varphi_\alpha(x) \equiv x'_\alpha = 0$  ( $\alpha = \overline{1, m_0} \leq m_1 \leq n$ ), что эквивалентно выбору  $u_+^0$  — наилучшего по (1.2) субоптимального регулятора (1.1), порожденного  $\lambda^+, S^+$  из классов (2.1), (2.2). Введем гамильтониан [4, 5] и обозначения

$$G(t, z, \psi) = v_0 \Phi_0 + \psi \cdot Z, \quad z = (x^*, a^*)^*, \quad Z = (\Phi^*, 0)^*, \quad \psi = (\psi_k)^*, \quad (2.4)$$

$$\psi = (p^*, \Theta^*)^*, \quad p = (p_i)^*, \quad \Theta = (\Theta_m)^* \quad (i = \overline{1, n}, \quad m = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, n+N}).$$

Из (2.3), (2.4) имеем необходимые условия оптимальности

$$p_\alpha(T_1^0) = v_\alpha, \quad \psi_j(T_1^0) = 0 (\psi(T_1) = v_\alpha \partial \varphi_\alpha / \partial z |_{t=T_1^0}, \quad j = m_0 + 1, \quad n + N), \quad (2.5)$$

$$v_0 \Phi_0(T_1^0, x^0[T_1^0], a^0) + v_\alpha \Phi_\alpha(T_1^0, x^0[T_1^0], a^0) = 0 (G|_{t=T_1^0} = 0, \quad \alpha = \overline{1, m_0}),$$

$$\Theta[t_0] = \Theta[T_1^0] = \int_{T_1^0}^{t_0} (\partial g / \partial a^0 |_{x=x^0, p=p^0}) d\tau = 0 \quad (\Theta^* = -\partial G / \partial a^0),$$

где  $x^0[t], p^0[t], T_1^0 = T_1(t_0, x_0, a^0)$  — соответствующие  $a^0$  траектория, импульс и момент примыкания (2.3), для которых имеем

$$dx^0/dt = \Phi(t, x^0, a^0), \quad dp^0/dt = -\partial g / \partial x^0, \quad \Theta^* = -\partial g / \partial a^0 (a^0 = \text{opt } a),$$

$$g(t, x, p, a) = v_0 \Phi_0 + p \cdot \Phi, \quad x^0[t_0] = x_0, \quad x^0[T_1^0] = 0, \quad t_0 = \text{fixconst} \geq 0.$$

При этом  $(v_0, v_\alpha)^* \neq 0, 0 \neq (v_0, \psi^*)^* \in C[t_0, T_1^0]$  ( $\alpha = \overline{1, m_0}$ ).

3. Пример. Рассмотрим субоптимальный синтез системы

$$x' = f(x, u), \quad f(0, 0), \quad f \in C_1(E^n \times \Omega), \quad x = (x_i)^*, \quad x^1 = (x_j)^*, \quad x^{(2)} = (x_\sigma)^*, \quad (3.1)$$

$$dx^1/dt = f^1(x, u), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n_1} \leq n, \quad \sigma = \overline{n_1 + 1, n},$$

$$u = (u_s)^*, \quad \Omega = \{u | 0 \leq v(u) \leq v_0\}, \quad v(au) = av(u),$$

$$\alpha \geq 0 (v_0 = \text{const}, \quad s = \overline{1, r} \leq n),$$

$$v(u) > v(0) = 0, \quad u \neq 0, \quad v(u_2) - v(u_1) > (u_2 - u_1) \partial v / \partial u_1$$

$$(\alpha_\delta u_\delta \neq 0, \quad \alpha_\delta^2 \neq 0, \quad \delta = 1, 2),$$

$$v \in C(E^r), \quad v \in C_1(E^r \setminus 0), \quad Q = \{x | x^1 = 0\}, \quad t_1 = \min t^* : \lim x^1[t] = 0,$$

$$t \rightarrow t^* - 0,$$

$$J = \int_0^{t_1} f_0(x, v) d\tau \rightarrow \min_{u \in \Omega} (0 < f_0 \in C(E^n \times \Omega), \quad f_0 \in C_1(E^n \setminus Q \times \Omega \setminus 0))$$

с агрегатом — производящей функцией  $S^+ \equiv y(x, a) \equiv ah(x^1)$  вида

$$y = ah(x^1), \quad h(x^1) > h(0) = 0, \quad \partial h / \partial x^1 \neq 0 (x^1 \in \{x | 0 < h(x^1) \leq h^0\}), \quad (3.2)$$

$$0 < \text{const} = a_1 < a < a_2 = \text{const} \leq \infty, \quad h^0 \leq \sup h(E^{n_1}), \quad h \in C_1(E^{n_1}/0),$$

$$h \in C(E^{n_1})$$

для вспомогательного критерия  $J^+$  с множителем штрафа  $\lambda^+(h, a)$

$$J^+ = \int_0^{t^1} \lambda^+ f_0 d\tau \rightarrow S^+ = \min_{u \in \Omega} 0 < \lambda^+ \subset C_1 (0 < h \leq h^0, a_1 < a < a_2). \quad (3.3)$$

Введем гамильтониан  $G$  вспомогательной задачи и обозначения

$$G = \lambda f_0(x, v) + ag \cdot f^1 (g \equiv \partial h / \partial x^1, u = va, v(a) = 1, 0 \leq v \leq v_0), \quad (3.4)$$

$$k(x, v) \equiv g \cdot f^1(x, va_+) \equiv \min_{\alpha} [g \cdot f^1(x, va)], \quad \alpha_+(x, v) = \operatorname{argmin}[\cdot],$$

$$H = \lambda f_0(x, v) + ak(x, v), \quad P = P(v, x, a, \lambda) = \max_{0 \leq v \leq v_0} (v \cdot v - H),$$

$$v = \partial H / \partial v, \quad v = \partial P / \partial v, \quad P(0, x, a, \lambda^+) = 0, \quad v_0 = 0, \quad v^+ = \partial P / \partial v_0 | \lambda = \lambda^+.$$

Здесь для  $x^1$ -стабилизации и простоты приняты условия

$$k(x, v^+) \leq -\omega_1(x^1, a) \quad (0 < h \leq h^0, a \in (a_1, a_2), 0 < \omega_1 \subset C(0 < h \leq h^0)), \quad (3.5)$$

$$\partial^2 H / \partial v^2 > 0, \quad 0 < v \leq v_0, \quad \partial H / \partial v |_{v=0} < 0, \quad \partial H / \partial v_0 \geq 0,$$

$$\lambda^+ = \lambda^+(h, a) : P(0, x, a, \lambda^+) \equiv 0 \quad (0 < h \leq h^0, a \in (a_1, a_2)).$$

Тогда  $y$  и оптимальный по (3.3)  $u^+$  удовлетворяют неравенствам

$$y' |_{u=u^+} = ak(x, v^+) \leq -a\omega_1(x^1, a) \quad (x \in \{0 < h(x^1) \leq h^0 = \text{const}\}, \forall a \in A_2^1), \quad (3.6)$$

$$u^+ = (\partial P / \partial v_0 | \lambda = \lambda^+) \alpha^+, \quad \alpha^+ = \alpha_+(x, v^+) \quad (\alpha_+ = \operatorname{arg min}_{\alpha} k(x, v, \alpha)). \quad (3.7)$$

$H(v), P(v)$  — строго выпуклы.  $G$  имеет в  $v^+$  строгий нулевой стационарный по  $v$  минимум при  $\lambda = \lambda^+, \lambda^+$  не зависит явно от  $x$ . По теореме п. 2  $u^+$  — субоптимальный регулятор (3.1), ибо в силу (3.2), (3.4) — (3.7)  $u^+(x, a)$   $x^1$ -стабилизирует (3.1) и минимизирует (3.3) для  $x_0^1 \in \{0 \neq h(x_0^1) = h_0 \leq h^0\}$ . Из (3.2), (3.4) — (3.6), замыкая (3.1) регулятором (3.7), получаем

$$J[u^0] = \min_{u \in \Omega} J(x_0 | u) \leq J_+(a) \equiv \int_0^{h_0} \Phi(h, a) dh \quad (\Phi^+ \equiv a\lambda^+ > 0, 0 < h \leq h^0). \quad (3.8)$$

Пусть задача минимизации  $J_+(a)$  на  $(a_1, a_2)$  имеет смысл

$$\lim_{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{h_0} a \lambda^{+1}(\xi, a) d\xi < +\infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0+), \quad \exists a^+ = \operatorname{arg min} J_+ \quad (a \in (a_1, a_2)).$$

Условия (2.5) определения оптимального для (3.8) числа  $a^0$  упрощаются

$$\int_0^{h_0} (\lambda^+ - a^0 \partial \lambda^+ / \partial a^0) \lambda^{+2} d\xi = 0 \quad (\lambda^+ : P(0, x, a, \lambda^+) \equiv 0). \quad (3.9)$$

Сравнением  $J_+(a^0)$  для решений (3.9) находим  $a^+$  и оценку  $J(u^0) \leq J_+(h_0, a^+)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В., Прикл. мат. и мех., 34, вып. 3, 440—456 (1970).
2. Аоки, М., In: Optimization methods for large-scale systems, 5 Aggregation, New York, McGraw Hill Book Company, 1971, p. 191—232.
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 27, № 3, 274—288 (1978).

4. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., «Наука», 1966, с. 295—300.
5. Моисеев Н. Н., В кн.: Численные методы в теории оптимальных систем, М., «Наука», 1971, с. 32—34.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
29/VI 1978

### I. KEIS

#### DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE SUBOPTIMAALNE SÜNTEES PÕÖRD- JA AGREGEERIMISMEETODIL

On esitatud kaks dünaamilise reguleeritava süsteemi stabiliseerimise kriteeriumi, tõestatud suboptimaalse regulaatori  $u(t, x, a)$  sünteesi teoreem ning leitud optimaalse agregeerimisvektori määramise tingimused.

### I. KEIS

#### ON SUBOPTIMAL STABILIZATION METHOD FOR DYNAMIC SYSTEMS VIA AGGREGATION AND THE INVERSE-PROBLEM SOLUTION

A new approach is proposed to the application of both Lyapunov functions and  $y(t, x, a)$ -informative variables to suboptimal aggregation of large-scale systems.

As a result, new relaxed controllability and stability conditions are established in the lemmas 1 and 2 for non-stationary non-linear controllable large-scale dynamic systems.

A theorem on the synthesis of efficient suboptimal controls  $u(t, x, a)$ , introduced via generating potential of the inverse problem and aggregation variables  $y(t, x, a)$ , is proposed.

Necessary conditions for the choice of the aggregation vector  $a$ , minimizing the performance index, are obtained.

The suboptimal control policy is derived by applying this approach for a special class of  $y$ -autonomous systems.