EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

УДК 531.36; 62—50

И. КЕЙС

О СУБОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СПОСОБОМ ОБРАЩЕНИЯ И АГРЕГАЦИИ

(Представлена Н. Алумяэ)

Для управляемой динамической системы предложены два критерия стабилизации. Методом производящих функций и агрегирующих переменных y доказана теорема о субоптимальном синтезе $u(t,x,a)$. Получены условия минимизации показателя для выбора a. Приводится пример.

1. Рассмотрим уравнения возмущений $x\equiv 0$ управляемой системы

$$x^{\cdot}=F(t,x,u)\,t,x\in R=\{t\geqslant 0,\ |x|<\infty\},\ F(t,0,0)\equiv 0,\ F\subset C_1(R\times\Omega),\quad (1.1)$$

$$u=(u_\sigma)^*\in U^0=\{u\in\Omega\subseteq E^s,\ u\in C_1(R')\},\quad R'=R_0\backslash x'=0,\ R_0=R\backslash|x^1|>H_0,$$

$$x=(x_\nu,x_h)^*,\ x^1=(x_\nu)^*,\ x^{(2)}=(x_h)^*,\ \nu=\overline{1,m_1}\leqslant\dim x=n,\ h=\overline{m_1+1,n},$$

$$x^1=(x_\alpha,x_\beta)^*,\ x'=(x_\alpha)^*,\ x''=(x_\beta)^*,\ \alpha=\overline{1,m_0}\leqslant m_1,\ \beta=\overline{m_0+1,m_1}$$

с компактом Ω, целью $Q=\{x\,|\,x'=0\}$ и критерием

$$J(t,x\,|\,u)=\int_t^{t_1}F_0(\tau,x,u)\,d\tau\to\min_u\ \ (\lim x'=0,\,t\to t_1-0,\,F_0\in C_1),\qquad (1.2)$$

где F, U^0 удовлетворяют условиям существования, единственности и продолжаемости $x[t]$ на $t\in[t_0,t_1)$, $x\in R'$, t_1 — первый момент примыкания x к Q в (1.2). Регулятор $u'\in U^0$ — x^1, x'-стабилизирующий (1.1), если имеем $|x^1|\leqslant\varepsilon'\leqslant H_0(t\in[t_0,t_1])$, $x'[t]\to 0$ при $t\to t_1-0$, $\forall|x'_0|\leqslant\delta'_0\leqslant\delta_0{}^1=\text{const}$, где $\forall\varepsilon>0$, фиксируются $t_0\geqslant 0$, $|x_0{}^{(2)}|<\infty$, $H_0=\text{const}>0$ и существует $\delta_0{}^1=\delta_0{}^1(t_0,x_0{}^{(2)},\varepsilon')\geqslant|x_0{}^1|>0$. Используются [1] обозначения $x_0=x[t_0]$, $x'_0\neq 0$, $|x_0''|<\delta_0{}^1$, $x[t]=x(t,t_0,x_0|u')$. Допустимый u^0 из класса $\{u'\}\subseteq U^0$ — оптимальный для (1.1) по (1.2), если $J(t,x|u^0)\leqslant J(t,x|u')$ при $|x_0{}^1|\leqslant\delta_0{}^1$, $0<|x'_0|\leqslant\delta'_0$, $(t_0,x_{h0}{}^{(2)},H_0)^*=$ $=\text{fixconst}$. Введем для стабилизации и наблюдаемости переменные

$$y=y(t,x,a)=(y_i)^*=(y'_j,y''_d)^*\ \ (i,l=\overline{1,l_0}\leqslant n,\ j=\overline{1,l_1},\ d=\overline{l_1+1,l_0}),\qquad (1.3)$$

$$y'=(y'_j)^*,\ y''=(y''_d)^*,\ y|_{x^1=0}\equiv 0,\ y'|_{x'=0}\equiv 0\ \ (r^1=|x^1|,\ r'=|x'|,\ l_0\ll n),$$

$$\operatorname{rank}\|\partial y_i/\partial x_l\|=l_0,\ y\in C(R_0\times A),\ y\in C_1(R'\times A),\ |y|=\varrho\geqslant\varrho_1\ (r^1,a)\gg 0,$$

$$|y'|=\varrho'\geqslant\varrho_1(r',a)\gg 0,\ \ \varrho_1(\xi_2,a)\geqslant\varrho_1(\xi_1,a),\ \ \varrho'_1(\xi_2,a)\geqslant\varrho'_1(\xi_1,a)\ (\xi_2>\xi_1),$$

$$\varrho_1(0,a)=\varrho'_1(0,a)=0,\ \varrho_1(\xi,a)\geqslant\varrho'_1(\xi,a)>0,\ \xi>0,\ \varrho_1,\varrho'_1\in C(R_0\times A),$$

где агрегаты y_i — вообще нелинейные по x, a связки Четаева с вектором [2, 3] агрегации $a = (a_m)^*$ из области $A \subseteq E^N$, $a = \text{const}, m = \overline{1, N}$.

В силу (1.3) для $\forall\, h \leqslant \varrho_1(H, a) = \max \varrho_1\ (|x^1| \leqslant H_0)\ |y| \leqslant h$ отвечает прообраз в $|x^1| \leqslant \delta(\varrho_1(\delta, a) = h_\delta)$, из $|y'| \to 0$ следует $|x'| \to 0$. Для $\forall\ (t, x_h)^*$, $a = \text{fixconst} \in A$ область $\{y\}$ содержит $|y| \leqslant h$. Поэтому для оптимальной x^1, x'-стабилизации (1.1), (1.2) достаточно решить в переменных ξ задачу оптимизации

$$\xi^{\cdot} = f(t, \xi, u, a),\ \xi \in D' = \xi(R'),\ f(t, 0, 0, a) \equiv 0\ \ (D' = D \backslash y' = 0), \tag{1.4}$$

$$y^{\cdot} = Y(t, \xi, u, a),\ \gamma^{\cdot} = \Gamma(t, \xi, u, a)\ \ (\gamma_k \equiv x_k,\ x_l = \eta_l(t, \xi, a) \in C_1(D' \times A)),$$

$$Y = \partial y / \partial t + F \cdot \partial y / \partial x,\ \Gamma = (F_k)^* |x_l = \eta_l\ \ (l = \overline{1, l_0},\ k = \overline{l_0 + 1, n}),$$

$$I = \int_t^{t_1} f_0\, d\tau \to \min_u,\ f_0 = F|_{x = x(t, \xi, a)} \in C_1(D' \times \Omega \times A)$$

при условии y, y'-стабилизации (1.4) I-оптимальным $u^1(t, \xi, a)$, где $|y| \leqslant h \leqslant H$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, $\lim y' = 0$ при $t \to t_1 - 0$ $(\forall |y_0| \leqslant \delta$, $H = \text{fixconst})$. Пусть (1.4) имеет в U^0 подкласс возможных u', порожденных $V(t, \xi, a)$ вида

$$V(t, \xi, a) \geqslant V_1(\varrho, a) > V|_{y=0} \equiv 0,\ \varrho \neq 0\ \ (0 \ll V_1 \in C([0, H] \times A)), \tag{1.5}$$

$$-V^{\cdot}|_{u=u'} = W(t, \xi, a) \geqslant 0,\ y' \neq 0,\ |y| \equiv \varrho \leqslant H,\ \forall a \in A,\ \xi \in D'_0,$$

$$D_0 = D \cap \{|y| \leqslant H\},\ D'_0 = D \backslash y' = 0,\ D = \xi(R_0),\ t \geqslant 0,\ W \subset C(D'_0 \times A).$$

Из (1.3), (1.5) для (1.4) при $u = u' \in U^0$ имеем y, y'-устойчивость

$$\forall \varepsilon \leqslant H\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, \gamma_0, a | V) : |y| \leqslant \varepsilon (t \in [t_0, t_1),\ \forall |y_0| \leqslant \delta \leqslant H), \tag{1.6}$$

$$\forall \varepsilon \leqslant H\, \exists \delta' = [\delta^2 - |y''_0|^2]^{1/2} \leqslant \delta : |y'| \equiv r \leqslant \varepsilon (\delta^0 \equiv \delta(H),\ \delta'^0 = \delta'(H)).$$

Остальные свойства $V, U', f(u')$, достаточные для $y' \to 0$ при $t \to t_1 - 0$ и фиксированных $t_0, y_0'', \gamma_0, \delta^0, \delta'^0$, доопределим ниже. Допустим противное: в области D'_0 (1.5) системы (1.4) есть $\xi_*[t]$ с $y_*'[t]$-компонентой, не сходящейся к нулю при $r_0 = r[t_0] \leqslant \delta'$ и $\forall t_1 \leqslant +\infty$ $(r_0 > 0$, $t_1 > t_0)$. Из (1.6) следует, что $r_* \equiv |y_*'|$ удовлетворяет условиям, задающим лишь два класса (1.7), (1.8) $\{r_*[t]\}$ функций вида C_*^1, $C_*^{(2)}$

$$\lim r_* = l^0 \leqslant H (t \to +\infty,\ 0 < l^0),\ \exists \tau_n \to +\infty,\ r_{*n} \to l^0 : r^{\cdot}_{*n} \to 0, \tag{1.7}$$

$$r_{*n} = r_*[\tau_n],\ r^{\cdot}_{*n} = dr_*/dt | t = \tau_n,\ \ 0 < r_*[t] \subset C_1[t_0, \infty),\ C^1_* = \{r_*[t]\},$$

$$\underline{\lim}\, r_*[t] = l^1 < l^{(2)} = \overline{\lim}\, r_*[t]\ (t \to +\infty,\ 0 \leqslant l^1 < l^{(2)} \leqslant H)$$
$$(0 < r_* \subset C_1[t_0, \infty)), \tag{1.8}$$

$$\exists \tau'_k \to +\infty,\ r'_{*k} \to l^1 : r'^{\cdot}_{*k} = 0 (r'_{*k} = r_*[\tau'_k],\ \tau'_k < \tau''_k < \tau'_{k+1} < \tau''_{k+1}),$$

$$\exists \tau''_k \to +\infty,\ r''_{*k} \to l^{(2)} : r''^{\cdot}_{*k} = 0 (r''_{*k} = r_*[\tau''_k],\ n, k = \overline{1, \infty},\ C^{(2)}_* = \{r_*[t]\}),$$

$$\forall\, l^* \in (l^1, l^{(2)}) \exists\, \tau^*_k \to +\infty : r_*[\tau^*_k] = l^*,\ r_*[t] \to [l^1, l^{(2)}]\ (t \to +\infty),$$

$$\forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2\, \exists\, T(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : l^1 - \varepsilon_1 < r_*[t] < l^{(2)} + \varepsilon_2,\ t \geqslant T \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Для $\forall r_*[t] \in C_*^{(2)}$ имеем последовательности $(\tau'_k, r'_{*k}) \to (\infty, l^1)$, $(\tau_k'', r_{*k}'') \to (\infty, l^{(2)})$ $(l^1 < l^{(2)})$ стационарных $r_*^{\cdot} = 0$ точек $r_*[t]$ — «экстремумов» ее колебаний. В классе $C_*^{(1)}$ возможны постоянные и монотонные функции, которых класс $C_*^{(2)}$ не имеет. Функция $r[t] \in C_*^1 \cup C_*^{(2)}$, если нет $(t_n, r_n)^* \to (+\infty, l)^*$ с $r_n^{\cdot} \to 0$ $(l > 0,\ r_n = r[t_n])$.

Введем совокупность $P = \{(\infty, r^*)^*\} \subset \bar{D}_0'$ $(0 < r^* \leqslant H)$ предельных для $p_m^* = (t_m^*, r_m^*)^*$ точек со свойствами: $t_m^* \to \infty$, $r_m^* \to r^*$, $R_m^* \to 0$, $m \to \infty$, где $r_m^* = |y_m'^*|$, $R = r^{\cdot}$, $R_m^* = R(t_m^*, \xi_m^*, a | u')$. P — множество r-агрегированных и предельных к $t_m^* \to +\infty$, $\xi_m^*(r_m^* \to r^* > 0)$ точек в D_0', на которых $r_m^{\cdot} \to 0$ при $m \to +\infty$. Из (1.7), (1.8) следует, что P непусто, если на D_0' имеем $\{r_*[\forall]\} \neq \varnothing$. $P \cup 0$ — замкнуто. При $t_m \to +\infty$, $r_m \to r \in [0, H]$ вообще $R_m \not\to 0$. Но для элементов p_n, p_n', p_n'' имеем

$$R_n = r_n^{\cdot} \to 0 \text{ при } t_n = \tau_n, \tau_n', \tau_n'',\ r_n = r_{*n}, r_{*n}', r_{*n}''\ (r_n \to r), \tag{1.9}$$

ибо их пределы лежат в $P \cup 0$. Пусть для $\forall\, r^* \in (0, H]$ существуют $\varepsilon^* = \varepsilon_*(r^*) > 0$, $T^* = T_*(r^*) \geqslant 0$, $w^* = w_*(r^*) > 0$, удовлетворяющие оценке

$$W \geqslant w^* > 0,\ t \geqslant T^*,\ |r - r^*| \leqslant \varepsilon^*,\ \forall\, \xi \in D_0',\ t < \infty,\ a \in A. \tag{1.10}$$

Пусть в $B = \{t \geqslant T^*, |r - r^*| \leqslant \varepsilon^*, \xi \in D_0'\}$ имеем неравенства

$$-R_1(t, r^*, a) \leqslant r^{\cdot}|_{u=u'} = R(t, \xi, a | u') \leqslant R_2(t, r^*, a) \quad (0 \leqslant R_1, R_2 \subset C) \tag{1.11}$$

с неотрицательными интегрируемыми на $[T^*, \infty)$ функциями R_α $(\alpha = 1, 2)$. Обозначим через T_1^-, T_2^-, T_1^+, T_2^+ решения уравнений

$$\int_{-T^-}^{0} R_1(t+\tau)\, d\tau = \varepsilon_-^* = \int_{-T^-}^{0} R_2(t+\tau)\, d\tau \quad (T_\alpha^- = T_\alpha^-(t, \varepsilon_-^*) > 0,\ \alpha = 1, 2), \tag{1.12}$$

$$\int_0^{T^+} R_1(t+\tau)\, d\tau = \int_0^{T^+} R_2(t+\tau)\, d\tau = \varepsilon_-^* = \varepsilon^* - \varepsilon_* > 0 \quad (T_\alpha^+ = T_\alpha^+(t, \varepsilon_-^*)),$$

дающие оценки снизу левого, правого и полного отрезков времени включения $r_*[\tau] \in B$ для начального $r_*[t]$ из $|r_*[t] - r^*| \leqslant \varepsilon_*$:

$$\Delta t^- \geqslant \Delta t_1^- = \min\{t - T^*, T_1^-, T_2^-\} \equiv T^-(t, \varepsilon_-^*),\ T_0^* = T^- + T^+, \tag{1.13}$$

$$\Delta t^+ \geqslant \Delta t_2^+ = \min\{T_1^+, T_2^+\} \equiv T^+(t, \varepsilon_-^*),\ \Delta t = T_0^*(t, \varepsilon_-^*).$$

Пусть для любой последовательности $t_k \to \infty$, $0 < t_k < t_{k+1}$ ряд

$$S_m^* = \sum_{k=1}^{m} T_0^*(t_k | \varepsilon_-^*)\ (\varepsilon_* = \varepsilon_*(t_k) \to 0,\ 0 < \varepsilon_-^* = \varepsilon^* - \varepsilon_*,\ k, m \to \infty), \tag{1.14}$$

$$S^* = \lim S_m^* = +\infty \quad (m \to \infty)$$

расходится при $m \to \infty$, $\forall\, \varepsilon_*$ и $\varepsilon^* > \varepsilon_* \geqslant 0$ в оценках (1.10), (1.11).

Лемма 1. *Возможный регулятор $u'(t, \xi, a)$ будет x^1, x'-стабилизирующим* (1.1) *для $t_0 = \text{fixconst} \geqslant 0$, $|x_0^1| \leqslant \delta_0^1, x_0^{(2)}$, если функции V, u' удовлетворяют условиям* (1.5), (1.10), (1.11), (1.14) *для* $\forall a \in A$.

Доказательство. С учетом (1.5), (1.6) достаточно показать при условиях леммы отсутствие решений $\xi_*[t]$ с r_*-компонентой для системы (1.11). Допустив противное, рассмотрим $r_*[t]$, для которой в силу (1.7)—(1.9) есть $\tau_k^* \to +\infty$ со свойствами

$$r[\tau_k^*] \equiv r_{*k} \to r^*,\ dr_*/d\tau_k^* \to 0\ (0 < r^* \leqslant H,\ \tau_k^* < \tau_{k+1}^*,\ k = \overline{1, \infty}), \tag{1.15}$$

$$\forall\, \varepsilon_* > 0\ \exists\, T_* \leqslant \tau_n : |r_*[\tau_n] - r^*| \leqslant \varepsilon_* < \varepsilon^* \quad (\{\tau_n\} \subseteq \{\tau_k^*\},\ n \to \infty).$$

Интегрируя вдоль $\xi_*[t]$ при $u=u'$ равенство $V^{\cdot}=-W$, с учетом (1.10)—(1.15) имеем неравенства

$$V[t_0]-V[\infty]=\int\limits_{t_0}^{\infty} W[\tau]\,d\tau\geqslant w^*S^*=\infty\quad (V[t_0]\geqslant V[\infty]\geqslant 0)\qquad(1.16)$$

в силу их противоречия $\{r_*[t]\}=\varnothing$. Лемма доказана.

Замечания. Для r-агрегированной предельной точки $r^*=H$ функция $T_0^*(t,\varepsilon_-^*)$ имеет вид $T_1^+ + T_0^-(T_0^-=\min\{t-T_H^*,T_2^-\},\ T_0^*==T_1^+(R_2=\infty),\ T_0^-(R_1=\infty))$. Если $P=\varnothing$ для u'-произведенной V вида (1.5), то $\varnothing=\{r_*[t]\}$ и $u'(t,\xi,a)$ — x^1,x'-стабилизирующий (1.1) регулятор. Условия леммы 1 ослабляются заменой на положительно рекуррентное, предельно r-стационарное множество $P_0\subseteq P$. Точка p_0 входит в $P_0=\{(\infty,r_0^*)^*\}$, если для (1.1) $(u=u')$ существует последовательность $\tau_k\to+\infty$ со свойствами

$$|R(\tau_k,\xi[\tau_k],a\,|\,u')\,|\xrightarrow{\downarrow} 0,\qquad r[\tau_k]\equiv|y'[\tau_k]|\to r_0^*\in(0,H],$$

где $0<r[t]\leqslant H$ при $|y_0|\leqslant\delta^0,\ 0<|y'_0|\leqslant\delta'^0\leqslant\delta^0,\ t_0\geqslant 0,\ \gamma_0\in E^{n-l_0}$,

$$f[t]=f(t,t_0,y_0,\gamma_0,a\,|\,u),\quad (t_0,\gamma_0,a)^*=\mathrm{fixconst}.$$

Установим второй критерий x^1, x'-стабилизации (1.1) при $u=u'$. Примем, что функция $r[t]$ при $u=u'$, $\xi\in D_0'$, $t\geqslant 0$, $\forall a\in A$ удовлетворяет дифференциальным неравенствам

$$|r^{\cdot}|\equiv|R|\leqslant R_1(t,r,a)\ (0<R_1\subset C(B^1),\ \partial R_1/\partial r\subset C(B^1)),\qquad(1.17)$$

где $B^1=\{0\leqslant t<\infty,\ 0<r\leqslant H\}$, $\forall a\in A$.

Пусть все r_1—$+\infty$-продолжаемые решения $r_1^{\cdot}=-R_1$ и верно

$$\lim r_1[t]>0,\ t\to+\infty\qquad (\forall t_0,\ r_{10}\in B^1,\ a\in A).\qquad(1.18)$$

На B^1 для системы (1.4) при $u=u'$ предположим свойства:

$$-V^{\cdot}|_{u=u'}\equiv W\geqslant W_1(t,r,a)\geqslant 0\,(W_1,\partial W/\partial r\subset C(B^1),\forall a\in A),\qquad(1.19)$$

$$\omega_1\equiv\partial W_1/\partial r\geqslant 0,\ t,r\in B^1,\ \Delta^+\omega\,|_{t^0,r^0}\equiv\omega\,|_{t^0+\Delta t}-\omega(t^0,r^0)>0\ (0<\Delta t\leqslant\varepsilon),$$

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_{t_0}^{T} W_1(\tau,r_1[\tau],a)\,d\tau=\infty,\ r_{10},t_0\in B^1,\ \forall a\in A\ (\forall t^0,\ r^0\in\{\omega_1=0\}\cap B^1).$$

Покажем, что $\xi_1[t]\equiv-1$, $r_1[t]$ — оптимальное решение задачи

$$r^{\cdot}=\xi R_1,\ -1\leqslant\xi\leqslant 1,\ \xi\in C[t_0,T]\,(0\leqslant t_0<T<\infty),\qquad(1.20)$$

$$0<r[t]\leqslant H=\mathrm{fixconst},\ t_0\leqslant t<T\qquad (r_0=r[t_0]>0,\ 0<r[T]\leqslant H),$$

$$I_1(t_0,r_0,T,a\,|\,\xi)=\int\limits_{t_0}^{T} W_1(\tau,r[\tau],a)\,d\tau\to\min_{\xi}=I_1(\xi^0).$$

Из (1.17), (1.20) и $\omega_1\geqslant 0$ находим $r_1[t]\leqslant r[t\,|\,\xi]$, $I_1(\xi_1)\leqslant I_1(\xi)$ $(t\in[t_0,T],\ \xi_1\equiv-1,\ \forall\xi[t]\geqslant\xi_1[t],\ \xi\in C)$ — оптимальность ξ_1. Для (1.20) имеем необходимые условия

$$H_1(t,r_1,p_1,\xi_1,a)\leqslant H_1(t,r_1,p_1,\xi,a),$$

$$p_1\xi_1=\min p_1\xi=-p_1<0\,(H_1=W_1+p_1\xi R_1),$$

$$p_1^{\cdot}=(\partial R_1/\partial r_1)p_1-\partial W_1/\partial r_1,\quad p_1[T]=0\,(p_1=\int\limits_{t}^{T}\Phi_1(t,\tau)\,\omega_1^1(\tau)\,d\tau,\quad t_0\leqslant t\leqslant T),$$

$$\Phi_1=\exp[\int_\tau^t \partial R_1/\partial r_1\, d\xi],\ r_1=r_1[\xi],\ \omega_1^1=\partial W_1/\partial r_1=\omega_1^1(\tau, r_1[\tau], a)\geqslant 0,$$

где $p_1>0$ на $[t_0, T)$ в силу локальной неинвариантности $\{\omega_1=0\}$ вдоль $r_1[t]$ при (1.19). Тогда согласно (1.20) и $|r_*^{\cdot}|\leqslant R_1(r_*)$ аналогично лемме 1 получаем из $I_1(r_1)\leqslant I_1(r_*)$ доказательство леммы 2.

Лемма 2. *Регулятор u' дает x^1, x'-стабилизацию* (1.1), *если функции V, u' удовлетворяют условиям* (1.5), (1.17)—(1.19).

2. Зададим $u^+(t, \xi, a|S^+, \lambda^+)\in U'$ потенциалом $S^+(t, \xi, a)\geqslant 0$ и штрафом $\lambda^+(t, \xi, a, u)\geqslant 0$ задачи обращения аналитического конструирования:

$$J^+(t, \xi, a|u, \lambda^+)=$$
$$=\int_t^{t^1}\lambda^+ f_0\, d\tau\,(S^+, \lambda^+\in C(D_0\times\Omega), \lambda^+, S^+\in C_1(D'_0\times\Omega), \forall a\in A),\quad (2.1)$$
$$J^+(u, \lambda^+)\to\min_u=$$
$$=S^+(t^1=\min t^*: y'[t^*]=0,\ 0<|y'|\leqslant H,\ 0<|y|\leqslant H,\ t<t^1).$$

Пусть для $S^+, \lambda^+\ \exists\ V^+, u^+$, удовлетворяющие лемме 1 или 2, причем

$$H^+(t, \xi, u, a)>H^+(t, \xi, u^+, a),\ u^+\neq u\in\Omega\,(H^+=\lambda^+ f_0+\partial S^+/\partial t+f\cdot\partial S^+/\partial\xi),\quad (2.2)$$
$$H^+(t, \xi, u^+, a|S^+, \lambda^+(u^+))\equiv 0,$$
$$t\geqslant 0,\ \xi\in D'_0,\ \forall a\in A\,(H(t, \xi, u, a|S^+, \lambda^+)\equiv H^+),$$
$$S^+|_{y'=0}=0,\ u^+=u'_+(t, \xi, a)\in C(t\geqslant 0, \xi\in D'_0),\ \lambda^+, S^+\in C_1(t\geqslant 0, D'_0\times\Omega),\ \forall a\in A.$$

Тогда имеем x^1, x'-стабилизацию (1.1) $(u=u_+(t, x, a)\equiv u'_+[t, \xi(t, x, a), a])$, существование, единственность и непрерывность u^+, строго минимизирующего H^+ в Ω.

Теорема. *Регулятор u'_+ оптимально по* (2.1) *y, y'-стабилизирует* (1.4) *в области* (1.6) *для значений $t_0, \xi_0\in C^0=\{t_0\geqslant 0,\ \xi_0\in D'_0, |y_0|\leqslant\delta^0\}$ $(a\in A)$, если для S^+, λ^+, u'_+ выполнены условия* (2.2) *и леммы* 1 *или* 2.

Доказательство. Из выполнения условий леммы 1 или 2 следует y, y'-стабилизация (1.4) при $u=u'_+(t, \xi, a)$. Интеграцией неравенств (2.2) из краевого условия на $S^+(t, \xi, a)$ для u'_+ и стабилизирующего $u_*\not\equiv u'_+$ получаем неравенства

$$S^+(t, \xi, a)=\int_t^{t^1}\lambda^+(u'_+)f_0(u'_+)d\tau<J^+(u_*, \lambda(u_*))=\int_t^{t_*^1}\lambda^+(u_*)f(u_*)d\tau,$$

означающие единственность минимизирующего (2.1) регулятора u'_+.

Теорема доказана. Поскольку $\lambda^+\not\equiv 1$, u'_+ — субоптимальный регулятор [3] системы (1.4) на C^0.

Замкнем систему (1.1), (1.2) с плоскостью цели Q субоптимальным, стабилизирующим ее локально при $\forall a\in A$ регулятором $u_+(t, x, a)$:

$$x^{\cdot}=\Phi(t, x, a),\ t, x\in\{t\geqslant 0,\ x(D'_0),\ \varrho\leqslant H\}\,(x=x(t, \xi, a),\ a\in A),\quad (2.3)$$
$$a^{\cdot}=0,\ Q=\{x|x'=0\}\,(u_+=u'_+(t, \xi(t, x, a), a),\ \Phi=F(t, x, u_+)),$$
$$J_+(t_0, x_0, a)=$$
$$=J(t_0, x_0|u_+)=\int_{t_0}^{t^1}\Phi_0(\tau, x, a)d\tau\,(\Phi_0=F_0(\tau, x, u_+),\ t^1=T_1(t_0, x_0, a)\neq t_1),$$

$$x_0=x[t_0]=x(t_0,\xi_0,a),\quad x'_1=x'[t^1]=0(t^1=\min t^*:\lim x'[t]=0,\quad t\to t^*-0),$$
$$t_0=\text{fixconst}\geqslant 0,\ \xi_0\in D'_0,\ |y_0|\leqslant\delta^0,\ |y'_0|\leqslant\delta'^0_0(t^1=\min t^*:\lim y'[t]= =0,\ t\to t^*-0).$$

Для (2.3) рассмотрим минимизацию J_+ по a при фиксированных t_0, x_0 и условиях $\varphi_\alpha(x)\equiv x'_\alpha=0$ $(\alpha=\overline{1,m_0}\leqslant m_1\leqslant n)$, что эквивалентно выбору $u_+{}^0$ — наилучшего по (1.2) субоптимального регулятора (1.1), порожденного λ^+, S^+ из классов (2.1), (2.2). Введем гамильтониан [4, 5] и обозначения

$$G(t,z,\psi)=\nu_0\Phi_0+\psi\cdot Z,\ z=(x^*,a^*)^*,\ Z=(\Phi^*,0)^*,\ \psi=(\psi_k)^*,\quad (2.4)$$
$$\psi=(p^*,\Theta^*)^*,\ p=(p_i)^*,\ \Theta=(\Theta_m)^*\ \ (i=\overline{1,n},\ m=\overline{1,N},\ k=\overline{1,n+N}).$$

Из (2.3), (2.4) имеем необходимые условия оптимальности

$$p_\alpha(T_1^0)=\nu_\alpha,\ \psi_j(T_1^0)=0(\psi(T_1)=\nu_\alpha\partial\varphi_\alpha/\partial z|t=T_1^0,\ j=m_0+1,\ n+N),\quad (2.5)$$
$$\nu_0\Phi_0(T_1^0,x^0[T_1^0],a^0)+\nu_\alpha\Phi_\alpha(T_1^0,x^0[T_1^0],a^0)=0(G|_{t=T_1{}^0}=0,\ \alpha=\overline{1,m_0}),$$
$$\Theta[t_0]=\Theta[T_0^1]=\int\limits_{T_1{}^0}^{t_0}(\partial g/\partial a^0|x=x^0,\ p=p^0)\,d\tau=0\quad(\dot\Theta=-\partial G/\partial a^0),$$

где $x^0[t]$, $p^0[t]$, $T_1{}^0=T_1(t_0,x_0,a^0)$ — соответствующие a^0 траектория, импульс и момент примыкания (2.3), для которых имеем

$$dx^0/dt=\Phi(t,x^0,a^0),\ dp^0/dt=-\partial g/\partial x^0,\ \dot\Theta=-\partial g/\partial a^0(a^0=\text{opt}\,a),$$
$$g(t,x,p,a)=\nu_0\Phi_0+p\cdot\Phi,\ x^0[t_0]=x_0,\ x'^0[T_1^0]=0,\ t_0=\text{fixconst}\geqslant 0.$$

При этом $(\nu_0,\nu_\alpha)^*\neq 0,\ 0\neq(\nu_0,\psi^*)^*\in C[t_0,T_1^0)$ $(\alpha=\overline{1,m_0})$.

3. Пример. Рассмотрим субоптимальный синтез системы

$$\dot x=f(x,u),\ f(0,0),\ f\in C_1(E^n\times\Omega),\ x=(x_i)^*,\ x^1=(x_j)^*,\ x^{(2)}=(x_\sigma)^*,\quad (3.1)$$
$$dx^1/dt=f^1(x,u),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n_1}\leqslant n,\ \sigma=\overline{n_1+1,n},$$
$$u=(u_s)^*,\ \Omega=\{u|0\leqslant\nu(u)\leqslant\nu_0\},\ \nu(\alpha u)=\alpha\nu(u),$$
$$\alpha\geqslant 0(\nu_0=\text{const},\ s=\overline{1,r}\leqslant n),$$
$$\nu(u)>\nu(0)=0,\ u\neq 0,\ \nu(u_2)-\nu(u_1)>(u_2-u_1)\partial\nu/\partial u_1$$
$$(\alpha_\delta u_\delta\neq 0\ \alpha_\delta^2\neq 0,\ \delta=1,2),$$
$$\nu\in C(E^r),\ \nu\in C_1(E^r\backslash 0),\ Q=\{x|x^1=0\},\ t_1=\min t_*:\lim x^1[t]=0,$$
$$t\to t_*-0,$$
$$J=\int\limits_0^{t_1}f_0(x,\nu)\,d\tau\to\min_{u\in\Omega}\quad(0<f_0\in C(E^n\times\Omega),\ f_0\in C_1(E^n\backslash Q\times\Omega\backslash 0))$$

с агрегатом — производящей функцией $S^+\equiv y(x,a)\equiv ah(x^1)$ вида

$$y=ah(x^1),\ h(x^1)>h(0)=0,\ \partial h/\partial x^1\neq 0(x^1\in\{x|0<h(x^1)\leqslant h^0),\quad (3.2)$$
$$0<\text{const}=a_1<a<a_2=\text{const}\leqslant\infty,\ h^0\leqslant\sup h(E^{n_1}),\ h\in C_1(E^{n_1}/0),$$
$$h\in C(E^{n_1})$$

для вспомогательного критерия J^+ с множителем штрафа $\lambda^+(h,a)$

$$J^+=\int_0^{t^1}\lambda^+f_0\,d\tau\to S^+=\min_{u\in\Omega},\ 0<\lambda^+\subset C_1(0<h\leqslant h^0,\ a_1<a<a_2). \tag{3.3}$$

Введем гамильтониан G вспомогательной задачи и обозначения

$$G=\lambda f_0(x,\nu)+ag\cdot f^1(g\equiv\partial h/\partial x^1,\ u=\nu\alpha,\ \nu(\alpha)=1,\ 0\leqslant\nu\leqslant\nu_0), \tag{3.4}$$

$$k(x,\nu)\equiv g\cdot f^1(x,\nu\alpha_+)\equiv\min_{\alpha}[g\cdot f^1(x,\nu\alpha)],\ \alpha_+(x,\nu)=\operatorname{argmin}[\cdot],$$

$$H=\lambda f_0(x,\nu)+ak(x,\nu),\ P=P(v,x,a,\lambda)=\max_{0\leqslant\nu\leqslant\nu_0}(v\cdot\nu-H),$$

$$v=\partial H/\partial\nu,\ \nu=\partial P/\partial v,\ P(0,x,a,\lambda^+)=0,\ v_0=0,\ \nu^+=\partial P/\partial v_0|\lambda=\lambda^+.$$

Здесь для x^1-стабилизации и простоты приняты условия

$$k(x,\nu^+)\leqslant-w_1(x^1,a)\ (0<h\leqslant h^0,\ a\in(a_1,a_2),\ 0<w_1\subset C(0<h\leqslant h^0)), \tag{3.5}$$

$$\partial^2H/\partial\nu^2>0,\ 0<\nu\leqslant\nu_0,\ \partial H/\partial\nu|_{\nu=0}<0,\ \partial H/\partial\nu_0\geqslant0,$$

$$\lambda^+=\lambda^+(h,a):P(0,x,a,\lambda^+)\equiv0(0<h\leqslant h^0,\ a\in(a_1,a_2)).$$

Тогда y и оптимальный по (3.3) u^+ удовлетворяют неравенствам

$$y^\cdot|_{u=u^+}=ak(x,\nu^+)\leqslant-aw_1(x^1,a)\ (x\in\{0<h(x^1)\leqslant h^0=\text{const}\},\ \forall a\in A_2^1), \tag{3.6}$$

$$u^+=(\partial P/\partial v_0|\lambda=\lambda^+)\alpha^+,\ \alpha^+=\alpha_+(x,\nu^+)\ (\alpha_+=\arg\min_{\alpha}k(x,\nu,\alpha)). \tag{3.7}$$

$H(\nu)$, $P(v)$ — строго выпуклы. G имеет в ν^+ строгий нулевой стационарный по ν минимум при $\lambda=\lambda^+$, λ^+ не зависит явно от x. По теореме п. 2 u^+ — субоптимальный регулятор (3.1), ибо в силу (3.2), (3.4)—(3.7) $u^+(x,a)$ x^1-стабилизирует (3.1) и минимизирует (3.3) для $x_0{}^1\in\{0\neq h(x_0{}^1)=h_0\leqslant h^0\}$. Из (3.2), (3.4)—(3.6), замыкая (3.1) регулятором (3.7), получаем

$$J[u^0]=\min_{u\in\Omega}J(x_0|u)\leqslant J_+(a)\equiv\int_0^{h_0}\Phi(h,a)\,dh\,(\Phi^+\equiv a\lambda^+>0,\ 0<h\leqslant h^0). \tag{3.8}$$

Пусть задача минимизации $J_+(a)$ на (a_1,a_2) имеет смысл

$$\lim\int_\varepsilon^{h_0}a\lambda^{+^{-1}}(\xi,a)\,d\xi<+\infty\ (\varepsilon\to0+),\ \exists a^+=\arg\min J_+\ (a\in(a_1,a_2)).$$

Условия (2.5) определения оптимального для (3.8) числа a^0 упрощаются

$$\int_0^{h_0}(\lambda^+-a^0\,\partial\lambda^+/\partial a^0)\lambda^{+^{-2}}d\xi=0\ (\lambda^+:P(0,x,a,\lambda^+)\equiv0). \tag{3.9}$$

Сравнением $J_+(a^0)$ для решений (3.9) находим a^+ и оценку $J(u^0)\leqslant J_+(h_0,a^+)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В. В., Прикл. мат. и мех., **34**, вып. 3, 440—456 (1970).
2. Aoki, M., In: Optimization methods for large-scale systems, 5 Aggregation, New York, McGraw Hill Book Company, 1971, p. 191—232.
3. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **27**, № 3, 274—288 (1978).

4. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, М., «Наука», 1966, с. 295—300.
5. Моисеев Н. Н., В кн.: Численные методы в теории оптимальных систем, М., «Наука», 1971, с. 32—34.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29/VI 1978

I. KEIS

DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE SUBOPTIMAALNE SÜNTEES PÖÖRD- JA AGREGEERIMISMEETODIL

On esitatud kaks dünaamilise reguleeritava süsteemi stabiliseerimise kriteeriumi, tõestatud suboptimaalse regulaatori $u(t, x, a)$ sünteesi teoreem ning leitud optimaalse agregeerimisvektori määramise tingimused.

I. KEIS

ON SUBOPTIMAL STABILIZATION METHOD FOR DYNAMIC SYSTEMS VIA AGGREGATION AND THE INVERSE-PROBLEM SOLUTION

A new approach is proposed to the application of both Lyapunov functions and $y(t, x, a)$-informative variables to suboptimal aggregation of large-scale systems.

As a result, new relaxed controllability and stability conditions are established in the lemmas 1 and 2 for non-stationary non-linear controllable large-scale dynamic systems.

A theorem on the synthesis of efficient suboptimal controls $u(t, x, a)$, introduced via generating potential of the inverse problem and aggregation variables $y(t, x, a)$, is proposed.

Necessary conditions for the choice of the aggregation vector a, minimizing the performance index, are obtained.

The suboptimal control policy is derived by applying this approach for a special class of y-autonomous systems.