EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.2.02

УДК 519.281

В. ОЛЬМАН

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ПАРАМЕТРА ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ ЗАДАННОМУ ЭЛЛИПСОИДУ

(Представлена Н. Алумяэ)

Рассмотрим схему наблюдений по регрессионной модели

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\theta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где случайные величины ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, независимы и распределены по нормальному закону $N(0,1)$; m-мерные неслучайные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ считаются известными, а θ — m-мерный неизвестный наблюдателю неслучайный вектор, $n > m$.

Во многих работах [1–3] по оцениванию вектора регрессионной модели (1) предполагается, что неизвестный вектор θ лежит в фиксированном эллипсоиде. В настоящей статье строятся оптимальные в некотором смысле критерии, позволяющие проверить истинность этого априорного знания.

Для проверки гипотезы $H_0: (\theta - \theta_0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\theta - \theta_0) \leqslant r^2$ против альтернативы $K: (\theta - \theta_0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\theta - \theta_0) > r^2$, где m-мерный вектор θ_0 и неотрицательно определенная матрица $\mathbf{A}$ порядка $(m \times m)$ считаются известными, будем использовать критические области W вида

$$W(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = \{\mathbf{Y} \in R^n : (\mathbf{TY} + \mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{TY} + \mathbf{u}) \geqslant 1\}, \tag{2}$$

где $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{u}$ неслучайные матрица и вектор порядков $(m \times n)$ и m соответственно. Каждому критерию W поставим в соответствие функцию

$$\gamma(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v) = \begin{cases} \alpha(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v) = \sup\limits_{\theta \in S(v)} P(W(\mathbf{T}, \mathbf{u}) \mid \theta), & v \leqslant r, \\ \beta(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v) = \inf\limits_{\theta \in S(v)} P(W(\mathbf{T}, \mathbf{u}) \mid \theta), & v > r, \end{cases}$$

где $S(v)$ — сфера $\{\theta \in R^m : (\theta - \theta_0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\theta - \theta_0) = v^2\}$, а $P(W(\mathbf{T}, \mathbf{u}) \mid \theta)$ — вероятность попадания вектора $\mathbf{Y}$ в критическую область W. Таким образом, с помощью функции $\gamma(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v)$ мы произвели факторизацию класса гипотез и класса альтернатив и получили некоторую аналогию задачи проверки гипотезы об одномерном параметре v, в которой $\gamma(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v)$ — функция мощности критерия $W(\mathbf{T}, \mathbf{u})$.

Введем в рассмотрение множество N_α, состоящее из критериев W вида (2) таких, что

$$\max_{v\leqslant r}\gamma(\mathbf{T},\mathbf{u},v)=\alpha,$$

т: е. $W(\mathbf{T},\mathbf{u})\in N_\alpha$, если наибольшая ошибка первого рода критерия $W(\mathbf{T},\mathbf{u})$ равна α.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{A}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}$ — *положительно определенная матрица,* $\mathbf{X}=(\mathbf{x}_1\,\vdots\,\mathbf{x}_2\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,\mathbf{x}_n)$. *Тогда в классе* N_α *критерий* W_0, *которому соответствуют* $\mathbf{T}_0=t_0(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ *и* $\mathbf{u}_0=-\mathbf{T}_0\mathbf{X}\theta_0$, *где* t_0 *выбирается из условия* $\gamma(\mathbf{T}_0,\mathbf{u}_0,r)=\alpha$, *является равномерно наиболее мощным, т. е.*

$$\begin{aligned}&\inf_{W\in N_\alpha}\alpha(\mathbf{T},\mathbf{u},v)=\alpha(\mathbf{T}_0,\mathbf{u}_0,v),\qquad v\leqslant r;\\ &\sup_{W\in N_\alpha}\beta(\mathbf{T},\mathbf{u},v)=\beta(\mathbf{T}_0,\mathbf{u}_0,v),\qquad v>r.\end{aligned}\tag{3}$$

Доказательство. Обозначив через c_n нормирующую постоянную n-мерного нормального закона, перепишем $P(W(\mathbf{T},\mathbf{u})\,|\,\theta)$ в интегральном виде:

$$P(W(\mathbf{T},\mathbf{u})\,|\,\theta)=c_n\int\limits_{(\mathbf{T}\mathbf{y}+\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{y}+\mathbf{u})\geqslant 1}\exp\left[-(\mathbf{y}-\mathbf{X}\theta)^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\theta)/2\right]d\mathbf{y}.$$

Вводя новые обозначения $\mathbf{G}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{1/2}\mathbf{T}$ и $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{1/2}(\theta-\theta_0)=\eta$, получим

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{T},\mathbf{u},v)&=\sup_{\eta^{\mathrm{T}}\eta=v^2}c_n\int_B\exp(-\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}/2)\,d\mathbf{e},\\ \beta(\mathbf{T},\mathbf{u},v)&=\inf_{\eta^{\mathrm{T}}\eta=v^2}c_n\int_B\exp(-\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}/2)\,d\mathbf{e},\end{aligned}\tag{4}$$

где $B=\{\mathbf{e}\in R^n:[\mathbf{G}\mathbf{e}+\mathbf{G}\mathbf{X}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1/2}\eta+\mathbf{T}\mathbf{X}\theta_0]^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{e}+\mathbf{G}\mathbf{X}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1/2}\eta+\mathbf{T}\mathbf{X}\theta_0]\geqslant 1\}$.

Из последних равенств в силу леммы 1 [4] нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}&\inf_{\mathbf{u}\in R^m}\alpha(\mathbf{T},\mathbf{u},v)\geqslant\alpha(\mathbf{T},-\mathbf{T}\mathbf{X}\theta_0,v),\\ &\beta(\mathbf{T},\mathbf{u},v)\leqslant\beta(\mathbf{T},-\mathbf{T}\mathbf{X}\theta_0,v),\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathbf{u}_0=-\mathbf{T}\mathbf{X}\theta_0$ является оптимальным значением вектора $\mathbf{u}$.

Существуют [5] ортогональные матрицы $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ порядка $(n\times n)$ и $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ порядка $(m\times m)$ такие, что $\mathbf{G}=\mathbf{B}_1(\mathbf{H}\,\vdots\,\mathbf{O}_{m,n-m})\mathbf{C}_1$ и $(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1/2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}_2(\mathbf{I}_m\,\vdots\,\mathbf{O}_{m,n-m})\mathbf{C}_2$, где $\mathbf{H}$ — диагональная матрица с диагональными элементами $0<h_1\leqslant h_2\leqslant\ldots\leqslant h_m$, $\mathbf{I}_m$ — единичная матрица порядка $(m\times m)$, $\mathbf{O}_{m,n-m}$ — нулевая матрица порядка $m\times(n-m)$. Обозначив $\mathbf{C}=\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2^{\mathrm{T}}$, преобразуем (4) к виду

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{T},\mathbf{u}_0,v)&=\sup_{\eta^{\mathrm{T}}\eta=v^2}P_\eta(\mathbf{H},\mathbf{N}),\\ \beta(\mathbf{T},\mathbf{u}_0,v)&=\inf_{\eta^{\mathrm{T}}\eta=v^2}P_\eta(\mathbf{H},\mathbf{N}),\end{aligned}$$

где $P_\eta(\mathbf{H},\mathbf{N})=c_m\int\limits_{(\mathbf{z}+\mathbf{N}\eta)^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^2(\mathbf{z}+\mathbf{N}\eta)\geqslant 1}\exp(-\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}/2)\,d\mathbf{z}$, $\mathbf{z}$ — m-мерный вектор, $\mathbf{N}=(\mathbf{I}_m\,\vdots\,\mathbf{O}_{m,n-m})\mathbf{C}(\mathbf{I}_m\,\vdots\,\mathbf{O}_{m,n-m})^{\mathrm{T}}$. Пусть вектор η_0 таков, что $\eta_0^{\mathrm{T}}\eta_0=r^2$

и $\mathbf{N}\eta_0 = (\xi, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$, $\xi < 0$. Тогда по лемме 1 * получаем

$$P_{s\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) < P_{s\eta_0}(h\mathbf{I}_m, \mathbf{N}), \quad s > 1,$$
$$P_{s\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) > P_{s\eta_0}(h\mathbf{I}_m, \mathbf{N}), \quad 0 < s < 1,$$

где $h > 0$ выбрано так, что $P_{\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) = P_{\eta_0}(h\mathbf{I}_m, \mathbf{N})$. Кроме того, в силу леммы 2 при $h_1 > h_2 > 0$ и $c > 1$ имеем

$$P_{s\eta_0}(h_1\mathbf{I}_m, \mathbf{N}) < P_{s\eta_0}(h_2\mathbf{I}_m, c\mathbf{N}), \quad s > 1, \tag{5}$$
$$P_{s\eta_0}(h_1\mathbf{I}_m, \mathbf{N}) > P_{s\eta_0}(h_2\mathbf{I}_m, c\mathbf{N}), \quad 0 < s < 1,$$

где h_1, h_2 и c связаны условием

$$P_{\eta_0}(h_1\mathbf{I}_m, \mathbf{N}) = P_{\eta_0}(h_2\mathbf{I}_m, c\mathbf{N}).$$

Заметим, что

$$\eta_0^{\mathrm{T}}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}\eta_0 = \eta_0^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{*\mathrm{T}}\mathbf{C}^*\eta_0 \leqslant \eta_0^{\mathrm{T}}\eta_0, \tag{6}$$

где $\mathbf{C}^*$ — квадратная матрица порядка $(m \times m)$, занимающая верхний левый угол в ортогональной матрице $\mathbf{C}$. Но неравенства (5) свидетельствуют о том, что увеличение нормы вектора $\mathbf{N}\eta_0$ улучшает качество критерия и, следовательно, для достижения равенства в (6) необходимо, чтобы $\mathbf{C}^* = \mathbf{I}_m$.

Окончательно, выбрав $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n$, т. е. $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$, и скаляр h таким, что $P_{\eta_0}(h\mathbf{I}_m, \mathbf{I}_m) = \alpha$, мы построили в силу неравенств (5) равномерно наиболее мощный критерий в смысле (3).

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{A}_2 = \mathbf{p}\mathbf{p}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{p}$ — *известный m-мерный вектор. Тогда в классе* $\mathbf{N}_\alpha$ *критерий* W_1, *которому соответствуют* $\mathbf{T}_1 = t_1(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ *и* $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{T}_1\mathbf{X}\theta_0$, *где* t_1 *выбирается из условия* $\gamma(\mathbf{T}_1, \mathbf{u}_1, r) = \alpha$, *является равномерно наиболее мощным в смысле* (3).

Доказательство. Так же, как и в теореме 1, можно показать, что для оптимального критерия W_1 необходимо, чтобы $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}_1{}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\theta_0 + \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = 0$. Тогда, вводя обозначения $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{T} = \mathbf{s}^{\mathrm{T}} \in R^n$ и $\theta - \theta_0 = \eta \in R^m$, получаем

$$\alpha(\mathbf{T}, \mathbf{u}_0, v) = \sup_{(\eta^{\mathrm{T}}\mathbf{p})^2 = v^2} c_n \int\limits_{(\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} + \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\eta)^2 \geqslant 1} \exp(-\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}/2)\, d\mathbf{e},$$

$$\beta(\mathbf{T}, \mathbf{u}_0, v) = \inf_{(\eta^{\mathrm{T}}\mathbf{p})^2 = v^2} c_n \int\limits_{(\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} + \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\eta)^2 \geqslant 1} \exp(-\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}/2)\, d\mathbf{e}.$$

Сделав замену переменных $\mathbf{B}\mathbf{e} = \mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{B}$ — ортогональная матрица, первая строка которой $\mathbf{s}^{\mathrm{T}}/\sqrt{\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}}$, преобразуем функции $\alpha(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v)$ и $\beta(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v)$ к виду

$$\alpha(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v) = \sup_{(\eta^{\mathrm{T}}\mathbf{p})^2 = v^2} c_1 \int\limits_{(z_1\sqrt{\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}} + \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\eta)^2 \geqslant 1} \exp(-z_1^2/2)\, dz_1,$$

$$\beta(\mathbf{T}, \mathbf{u}, v) = \inf_{(\eta^{\mathrm{T}}\mathbf{p})^2 = v^2} c_1 \int\limits_{(z_1\sqrt{\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}} + \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\eta)^2 \geqslant 1} \exp(-z_1^2/2)\, dz_1.$$

---

* Формулировка и доказательство лемм приведены в конце статьи.

Заметим, что существует скаляр $\gamma \in R^1$ такой, что вектор $\mathbf{s}_0 = \mathbf{T}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{s}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \gamma\mathbf{p}^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

в противном случае $\sup\limits_{(\eta^{\mathrm{T}}\mathbf{p})^2 = v^2} (\mathbf{s}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\eta) = \infty$ и $\alpha(\mathbf{T}, \mathbf{u}_0, v) = 1$, что противоречит условию $W \in N_\alpha$. Общий вид решения уравнения (7) относительно $\mathbf{s}_0$ принимает вид [5]

$$\mathbf{s}_0 = \gamma[\mathbf{X}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{p} + (\mathbf{I}_n - (\mathbf{X}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})\mathbf{L}], \tag{8}$$

где $\mathbf{L}$ — произвольный вектор из R^n. Используя обозначения теоремы 1, получаем

$$P_\eta(\mathbf{H}, \mathbf{N}) = P_1(\mathbf{s}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{s}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_0}),$$

где

$$\mathbf{s}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_0 = \gamma^2[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{p} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})\mathbf{L}]$$

и

$$\mathbf{s}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{p} = \gamma\eta + (\gamma - 1)\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\eta.$$

Из леммы 2 следует, что для оптимального критерия надо взять $\mathbf{L} = \mathbf{O} \in R^m$, что и доказывает теорему.

Лемма 1. *Пусть $h_2 > h_1$, а $\mathbf{H}_1$ — диагональная матрица порядка $(m \times m)$ с диагональными элементами $h, h, h_3, \ldots, h_m$, где h выбрано так, что $P_{\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) = P_{\eta_0}(\mathbf{H}_1, \mathbf{N})$. Тогда*

$$P_{s\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) < P_{s\eta_0}(\mathbf{H}_1, \mathbf{N}), \quad s > 1,$$

$$P_{s\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) > P_{s\eta_0}(\mathbf{H}_1, \mathbf{N}), \quad 0 < s < 1.$$

Доказательство. Достаточно показать, что из равенства $P_{s_0\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) = P_{s_0\eta_0}(\mathbf{H}_1, \mathbf{N})$ для некоторого $s_0 > 0$ следует

$$[d(P_{s\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N})/ds]/_{s=s_0} < [d(P_{s\eta_0}(\mathbf{H}_1, \mathbf{N})/ds]/_{s=s_0}.$$

По определению

$$[d(P_{s\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N})/ds]/_{s=s_0} = -c_m\xi \int\limits_{z \in J(\mathbf{H}^2)} \exp(-\sum_{i=2}^{m} z_i^2/2 - (z_1 - s_0\xi)^2/2)\,(z_1 - s_0\xi)\,dz, \tag{9}$$

где $J(\mathbf{H}^2) = \{\mathbf{z} \in R^m : \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^2\mathbf{z} \leqslant 1\}$. Из (9) с помощью несложного преобразования получаем

$$[d(P_{s\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N})/ds]/_{s=s_0} = s_0\xi^2 P_{s_0\eta_0}(\mathbf{H}, \mathbf{N}) - c_m\xi \times$$

$$\times \int\limits_{z \in J(\mathbf{H}^2) \cap \{z \in R^m : z_1 \geqslant 0\}} \exp(-\sum_{i=2}^{m} z_i^2/2)\,[\exp(-(s_0\xi - z_1)^2/2) + \exp(-(s_0\xi + z_1)^2/2)] \times$$

$$\times z_1\,\mathrm{th}(s_0\xi z_1)\,dz_1\,dz_2 \ldots dz_m,$$

где $\mathrm{th}(v) = (e^v - e^{-v})/(e^{-v} + e^v)$, $v \in R^1$. Выписывая аналогичным образом $[d(P_{s\eta_0}(\mathbf{H}_1, \mathbf{N})/ds]/_{s=s_0}$, находим

$$c_m^{-1}\left[d\left(P_{s\eta_0}(\mathbf{H},\mathbf{N})-P_{s\eta_0}(\mathbf{H}_1,\mathbf{N})\right)/ds\right]/_{s=s_0}=\int\limits_{z\in F_0\setminus F_1}\exp\left(-\sum_{i=2}^{m}z_i^2/2\right)\times$$
$$\times\left[\exp\left(-(s_0\xi-z_1)^2/2\right)+\exp\left(-(s_0\xi+z_1)^2/2\right)\right]\times \tag{10}$$
$$\times z_1\operatorname{th}(s_0\xi z_1)\,dz-\int\limits_{z\in F_1\setminus F_0}\exp\left(-\sum_{i=2}^{m}z_i^2/2\right)\left[\exp\left(-(s_0\xi-z_1)^2/2\right)+\right.$$
$$\left.+\exp\left(-(s_0\xi+z_1)^2/2\right)\right]z_1\operatorname{th}(s_0\xi z_1)\,dz,$$

где

$$F_0=J(\mathbf{H}^2)\cap\{z\in R^m: z_1\geqslant 0\},$$
$$F_1=J(\mathbf{H}_1^2)\cap\{z\in R^m: z_1\geqslant 0\}.$$

Очевидно, что если $(z'_1, z'_2, \ldots, z'_m)\in F_0\setminus F_1$, а $(z_1'', z_2'', \ldots, z_m'')\in F_1\setminus F_0$, то $z'_1>z_1''$. Но функция $z_1\operatorname{th}(s_0\xi z_1)$ убывает по $z_1>0$, следовательно, выражение (10) не положительно, что и доказывает лемму 1.

Л е м м а 2. *Пусть* $P(t,\eta)=\int\limits_{z\in\overline{K}(t,\eta)}\exp(-\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}/2)\,dz$, *где*

$$\overline{K}(t,\eta)=\{\mathbf{z}\in R^m: t^2(\mathbf{z}+\eta)^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}+\eta)\geqslant 1\},\quad t\neq 0,\ \eta\in R^m.$$

Выберем $\eta_0=(h_0, 0, \ldots, 0)\in R^m$, $\eta_1=(h_1, 0, \ldots, 0)\in R^m$, $0>h_1>h_0$ *и* $0<t_0<t_1$ *так, что* $P(t_0,\eta_0)=P(t_1,\eta_1)$. *Тогда*

$$P(t_0,s\eta_0)>P(t_1,s\eta_1),\quad s>1,$$
$$P(t_0,s\eta_0)<P(t_1,s\eta_1),\quad 0<s<1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что из равенства $P(t_0,s_0\eta_0)=P(t_1,s_0\eta_1)$ для некоторого $s_0>0$ следует

$$\left[d\left(P(t_0,s\eta_0)\right)/ds\right]/_{s=s_0}>\left[d\left(P(t_1,s\eta_1)\right)/ds\right]/_{s=s_1}. \tag{11}$$

По определению $P(t,\eta)$ для $i=0,1$ имеем

$$\left[d\left(P(t_i,s\eta_i)\right)/ds\right]/_{s=s_0}=-h_i\int\limits_{z\in M_i}\exp(-\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}/2)\,z_1dz, \tag{12}$$

где $M_i=\{\mathbf{z}\in R^m: t_i^2(\mathbf{z}+s_0\eta_i)^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}+s_0\eta_i)\leqslant 1\}$. Используя разложение $M_i=\{M_i\setminus(M_{1-i}\cap M_i)\}\cup\{M_i\cap M_{1-i}\}$ и формулу (12), получаем

$$\left[d\left(P(t_1,s\eta_1)-P(t_0,s\eta_0)\right)/ds\right]_{s=s_0}=(h_0-h_1)\int\limits_{z\in M_0\cap M_1}\exp(-\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}/2)\,z_1dz+$$
$$+h_0\int\limits_{z\in M_0\setminus(M_0\cap M_1)}\exp(-\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}/2)\,z_1dz-h_1\int\limits_{z\in M_1\setminus(M_0\cap M_1)}\exp(-\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z})/2)\,z_1dz. \tag{13}$$

Поскольку $h_1>h_0$ и $P(t_0,s_0\eta_0)=P(t_1,s_0\eta_1)$, то если $(z'_1, z'_2, \ldots, z'_m)\in M_0\setminus\{M_0\cap M_1\}$, а $(z_1'', z_2'', \ldots, z_m'')\in M_1\setminus\{M_0\cap M_1\}$, то, очевидно, $z'_1>z_1''$. Используя этот факт и теорему о среднем, легко получаем, что первое слагаемое в (13), а также разность двух других членов в (13) отрицательны, что и доказывает лемму 2,

ЛИТЕРАТУРА

1. Bunke, O., Math. Operationsforsch. u. Statist., **6**, № 5, 697—701 (1975).
2. Кукс Я., Ольман В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, № 1, 66—72 (1972).
3. Кукс Я., Ольман В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, № 4, 480—482 (1971).
4. Ольман В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **23**, № 2, 127—134 (1974).
5. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, М., «Наука», 1968.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/XII 1978

V. OLMAN

LINEAARSE MUDELI PARAMEETRI ANTUD ELLIPSOIDI KUULUMISE HÜPOTEESI KONTROLL

On kontrollitud lineaarse regressioonimudeli parameetri θ kohta püstitatud hüpoteesi $H_0:(\theta-\theta_0)^T\mathbf{A}(\theta-\theta_0)\leqslant r^2$ õigsust. Maatriksi **A** kahe erikuju korral on leitud lineaarsete statistikutega tsentreeritavate ellipsoidide hulgast kõige suurema võimsusega kriitiline piirkond.

V. OLMAN

TESTING OF THE HYPOTHESIS OF LINEAR REGRESSION PARAMETER BELONGING TO FIXED ELLIPSOID

Linear regression model $E\mathbf{Y}=\mathbf{X}\theta$ with independent errors in observations is considered. Statistical hypothesis $H_0:(\theta-\theta_0)^T\mathbf{A}\ (\theta-\theta_0)\leqslant r^2$ is tested against alternative $K:$ $:(\theta-\theta_0)^T\mathbf{A}(\theta-\theta_0)>r^2$, where matrix **A** and vector θ_0 are fixed. The maximal risk over surface $(\theta-\theta_0)^T\mathbf{A}\ (\theta-\theta_0)=v^2$ is taken as error of first kind for $v\leqslant r$ and as error of second kind for $v>r$. The ellipsoids centered by linear statistics of observations are investigated as critical regions. For two special cases of matrix **A** the uniformly most powerful tests are constructed.