EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 2

УДК 517 : 518.392

М. ЛЕВИН, В. АРРО

ЗАМЕЧАНИЕ О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

M. LEVIN, V. ARRO. MÄRKUS PARIMATE KAALUFUNKTSIOONIGA KVADRATUURVALEMITE KOHTA

M. LEVIN, V. ARRO. A REMARK ON THE OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS WITH WEIGHT FUNCTION

Для приближенного вычисления определенного интеграла от функции $f_0(x)$ возможен следующий путь [1–2]. Среди множества квадратурных формул определенного вида выбираем ту, которая в некотором смысле является наилучшей на множестве H функций $f(x)$, содержащем заданную функцию $f_0(x)$. Интеграл от $f_0(x)$ считаем по выбранной наилучшей формуле.

Пусть r, n, M, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ заданы, W^rL_q — множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и удовлетворяют условию

$$\|f^{(r)}(x)\|_{L_q(0,1)} \leqslant M.$$

Для заданной функции $\alpha(x)$ через $W^r{}_{\alpha(x)}L_q$ обозначим множество всех непрерывных на $[0,1]$ функций $f(x)$ таких, что $f(\alpha(x)) \in W^rL_q$.

Через x_k^*, A_k^* $(k=1, \ldots, n)$ обозначим узлы и веса наилучшей [2] на множестве W^rL_q формулы вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{1}$$

где $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$. Другими словами, будем считать числа $x_k = x_k^*$, $A_k = A_k^*$ $(k=1, \ldots, n)$ выбранными из условия, чтобы

$$\sup_{f \in W^r L_q} |R_n(f)|$$

имело наименьшее значение.

Существенно отметить, что числа $\{x_k^*, A_k^*\}$ не зависят от величины M и для ряда значений r известны [2].

Будем считать, что заданная функция $\varrho(x)$ суммируема на $[0,1]$ и такова, что функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\nu}\int_0^x \varrho(t)\,dt,$$

где $\nu=\int\limits_0^1 \varrho(t)\,dt$, монотонно возрастает на $[0,1]$. Через $\lambda(x)$ обозначим функцию, обратную на $[0,1]$ к функции $\varphi(x)$. Например, если $\varrho(x)=x^{-1/2}$, то $\lambda(x)=x^2$, а для $\varrho(x)=[x(1-x)]^{-1/2}$ легко подсчитать, что $\lambda(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Теорема. *Наилучшая на $W^r_{\lambda(x)}L_q$ формула вида*

$$\int\limits_0^1 \varrho(x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n B_k f(t_k)+E_n(f) \quad (0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant 1), \tag{2}$$

т. е. формула (2) *с наименьшим значением величины*

$$E_n=\sup_{f\in W^r_{\lambda(x)}L_q} |E_n(f)|,$$

имеет узлы, веса

$$t_k=\lambda(x^*_k), \quad B_k=\nu A^*_k \quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

и оценку остатка

$$E_n=\nu\cdot \inf_{\{x_k,A_k\}} \sup_{f\in W^rL_q} |R_n(f)|. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, $F_f(x)=f(\lambda(x))$. Тогда, учитывая обозначения (в том числе и (1)), имеем

$$\int\limits_0^1 \varrho(x)f(x)\,dx=\nu\int\limits_0^1 F_f(x)\,dx=\nu\sum_{k=1}^n A_kF_f(x_k)+\nu R_n(F_f). \tag{4}$$

Очевидно, здесь

$$\sup_{f\in W^r_{\lambda(x)}L_q} |R_n(F_f)|\leqslant \sup_{f\in W^rL_q} |R_n(f)|. \tag{5}$$

С другой стороны, пусть $\mu(x)$ — произвольная функция из W^rL_q, а $\gamma(x)=\mu(\varphi(x))$. Тогда $\gamma(x)\in W^r_{\lambda(x)}L_q$.
Кроме того,

$$R_n(F_\gamma)=\int\limits_0^1 \gamma(\lambda(x))\,dx-\sum_{k=1}^n A_k\gamma(\lambda(x_k))=\int\limits_0^1 \mu(x)\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^n A_k\mu(x_k)=R_n(\mu).$$

Поэтому

$$\sup_{f\in W^rL_q} |R_n(f)|\leqslant \sup_{f\in W^r_{\lambda(x)}L_q} |R_n(F_f)|. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$\sup_{f\in W^r_{\lambda(x)}L_q} |R_n(F_f)|=\sup_{f\in W^rL_q} |R_n(f)|.$$

Отсюда получаем, что наилучшая на множестве $W^r_{\lambda(x)}L_q$ формула (4) имеет узлы и веса x_k^*, A_k^* $(k=1, \ldots, n)$, а ее оценка совпадает с оценкой (3).

Поскольку $0 \leqslant \lambda(x) \leqslant 1$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, формулы (4) являются формулами вида (2). И обратно, так как каждому значению $t \in [0,1]$ соответствует значение $x \in [0,1]$ такое, что $t=\lambda(x)$, каждая формула (2) является формулой вида (4). Следовательно, множества формул (2) и (4) совпадают, но тогда наилучшая на $W^r_{\lambda(x)}L_q$ формула (2) совпадает с наилучшей на этом же множестве функций формулой (4). Теорема доказана.

Из этой теоремы, например, следует, что при $\varrho(x)=[x(1-x)]^{-1/2}$ наилучшая формула (2) на множестве непрерывных на $[0,1]$ функций $f(x)$ таких, что $f\left(\sin^2\frac{\pi}{2}x\right) \in W^r L_q$, имеет вид

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \pi \sum_{k=1}^n A_k^* f\left(\sin^2\frac{\pi}{2}x_k^*\right) + E_n(f). \tag{7}$$

Замечание. Вышедоказанная теорема распространяется и на случай, когда рассматриваются квадратурные формулы, использующие производные подынтегральной функции, а также на формулы с частично (или полностью) фиксированными узлами.

Пример. Приведем результаты вычисления интеграла

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x(1-x)}}dx = 1{,}3417069$$ по формуле (7) для случая $r=2, q=\infty$:

n	Значение интеграла по (7)	Ошибка $\lvert E_n(f)\rvert$
4	1,3405	0,0012
8	1,34156	0,00015
16	1,341689	0,000017
32	1,3417047	0,0000022
64	1,34170665	0,0000003

ЛИТЕРАТУРА

1. Sard, A., Amer. J. Math., **LXXI**, 80 (1949).
2. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 30/IX 1977