EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 2

УДК 519.1

Т. РИЙСМАА

ОБ ОДНОЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР

T. RIISMAA. ÜHEST HIERARHILISTE STRUKTUURIDE OPTIMEERIMISE ÜLESANDE ESITUSEST

T. RIISMAA. ON A STATEMENT OF THE OPTIMIZATION PROBLEM FOR HIERARCHICAL STRUCTURES

Конечный граф (E, U) есть прадерево с корнем $x_1 \in E$, если

1) в каждую его вершину, кроме x_1, заходит одна единственная дуга;

2) в x_1 не заходит ни одна дуга;

3) (E, U) не содержит контуров ([1], с. 173).

Предположим, что множество вершин E разделено на два непустых непересекающихся множества $E = C \cup P$: $C = \{x \in E \mid \Gamma x \neq \varnothing\}$ и $P = \{x \in E \mid \Gamma x = \varnothing\}$, где $\Gamma x = \{y \mid (x, y) \in U\}$ и $x, y \in E$, (x, y) — дуга графа, U — множество дуг.

Множество $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ будем называть множеством узлов (невисящих вершин), $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ — множеством точек (висящих вершин) ([1], с. 165).

На всяком подмножестве $F \subset E$ определим всевозможные прадеревья, множеством вершин которых является это подмножество. Получим множество прадеревьев H_E. Для F предполагается

$$F = F_1 \cup F_2,\ F_1 \subset C,\ F_2 \subset P,\ F_2 \neq \varnothing.$$

Таким образом, множество узлов любого прадерева $H \in H_E$ является подмножеством множества C, а множество точек — подмножеством множества P.

Каждой точке $p_i \in P$ поставим в соответствие функцию $f_i(x_i)$, где $f_i : R^q_+ \to R_+$, $f_i(0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{iq})$ и $Q = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid G(x) \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$. Каждому узлу $c_j \in C$ поставим в соответствие функцию $h_j(k_j)$, где $h_j : N \to R_+$, $h_j(0) = 0$, $h_j(k_j) > 0$ при $k_j > 0$ и h_j — возрастающая функция $(j = 1, \ldots, m)$, $N = \{0, 1, \ldots\}$. Величина k_j интерпретируется как число дуг, исходящих из узла c_j.

Далее, прадерево будем называть иерархией. Каждой иерархии $H \in H_E$ со множеством узлов и точек $F = F_1 \cup F_2 = \{c_{\tau_1}, \ldots, c_{\tau_\alpha}\} \cup \{p_{\nu_1}, \ldots, p_{\nu_\beta}\}$ сопоставлена функция

$$\varphi(H) = f * h = f_{\nu_1} * \ldots * f_{\nu_\beta} * h_{\tau_1} * \ldots * h_{\tau_\alpha},$$

где $*$ означает некоторый закон синтеза, $\nu_1, \ldots, \nu_\beta$ и $\tau_1, \ldots, \tau_\alpha$ являются подпоследовательностями последовательностей $1, \ldots, n$ и $1, \ldots$ $\ldots, m$ соответственно.

В качестве такого закона рассмотрим соотношение

$$f * h = \sum_{i=1}^{\beta} f_{\nu_i}(x_{\nu_i}) - \sum_{j=1}^{\alpha} h_{\tau_j}(k_{\tau_j}). \tag{1}$$

Иерархия H_0, при которой

$$\varphi(H_0) = \max_{H \in H_E} \varphi(H), \tag{2}$$

называется оптимальной иерархией.

Иерархия интерпретируется как структура иерархической системы, которая состоит из координаторов (узлов), процессов (точек) и соотношений между ними (дуг), направление которых показывает определенную подчиненность этих узлов и точек.

Первое слагаемое в соотношении (1) интерпретируется как продукция β процессов ($\beta \leqslant n$), а второе — как затраты на координирование работы β процессов и $\alpha - 1$ координаторов ($\alpha \leqslant m$). Величина x_i может быть рассмотрена как ресурсы в распоряжении процесса p_i, а величина k_j — как координаторы и процессы, подчиненные координатору c_j.

Задача нахождения оптимальной иерархии сводится к решению следующей задачи частично целочисленного нелинейного программирования: по $x_1, \ldots, x_n, \beta, k_1, \ldots, k_m, \alpha$ максимизировать

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) - \sum_{j=1}^{m} h_j(k_j) \tag{3}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} k_j = \beta + \alpha - 1, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \delta(k_j) = \alpha, \quad \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) = \beta, \tag{5}$$

$$\alpha \in N, \quad \beta \in N \setminus \{0\}, \quad k_j \in N \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

$$x \in Q, \tag{7}$$

где $\delta(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j > 0 \\ 0, & k_j = 0 \end{cases}, \ (j = 1, \ldots, m); \ \delta(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 0 \\ 0, & x_i = 0 \end{cases}, \ (i = 1, \ldots, n);$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Здесь α — число узлов ($\alpha \leqslant m$), а β — число точек ($\beta \leqslant n$) иерархии. Левая часть ограничения (4) представляет собой те узлы, откуда дуги исходят, а правая — те узлы и точки, куда они заходят. В один узел — это корень иерархии — не заходит ни одна дуга. Ограничения (5) показывают, что у иерархии есть α узлов и β точек. Из определения $\delta(x_i)$ ясно, что иерархия имеет точку p_i тогда и только тогда, когда $x_i > 0$. Из определения $\delta(k_j)$ ясно, что иерархия имеет узел c_j тогда и только тогда, когда $k_j > 0$. Естественно, что $\alpha, \beta, k_j (j = 1, \ldots, m)$ неотрицательные целые числа, и из предположения $F_2 \neq \varnothing$ следует: $\beta \geqslant 1$.

Решение задачи (3)—(7) обозначим через (k^0, x^0), где $k^0 =$ $= (k_1^0, \ldots, k_m^0, \alpha^0)$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, \beta^0)$.

Каждой иерархии H из множества H_E соответствует допустимое решение задачи (3)—(7) и, наоборот, каждому допустимому решению задачи (3)—(7) соответствует некоторая иерархия из множества H_E.

Допустимое решение (k, x) задачи (3)—(7) не определяет иерархию полностью в том смысле, что каждому допустимому решению может соответствовать целое множество иерархий. Вектор $k = (k_1, \ldots, k_m, \alpha)$ определяет множество узлов иерархии и число дуг, исходящих из каждого узла. Вектор $x = (x_1, \ldots, x_n, \beta)$ определяет множество точек иерархии. Всевозможные иерархии, имеющие вышеуказанное множество точек, узлов и число дуг, исходящих из каждого узла и заданных положительными компонентами вектора k, соответствуют допустимому решению (k, x) задачи (3)—(7).

Иногда возникает задача о нахождении оптимальной иерархии, где число точек β фиксировано заранее. Тогда задача (3)—(7) распадается на две самостоятельные задачи:

$$\max_{x_1, \ldots, x_n} \{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \mid x \in Q, \ \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) = \beta\} \tag{8}$$

и

$$\min_{k_1, \ldots, k_m, \alpha} \{\sum_{j=1}^{m} h_j(k_j) \mid \sum_{j=1}^{m} k_j = \beta + \alpha - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{m} \delta(k_j) = \alpha, \ \alpha \in N, \ k_j \in N \ (j = 1, \ldots, m)\}, \tag{9}$$

где $\delta(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $\delta(k_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ уже определенные функции.

Задача (8) является задачей нелинейного программирования с дополнительным условием, что положительными могут быть точно β компонент. Задача целочисленного нелинейного программирования (9) является задачей нахождения оптимальной иерархии при фиксированном числе точек. Для решения задачи (9) можно использовать метод динамического программирования ([2], с. 251).

Развитый здесь подход к задачам оптимизации иерархии представляет собой одно из возможных продолжений идеи Р. Куликовского [3], который рассматривал иерархии, состоящие из объектов двух типов (процессов, координаторов) и связей (дуг) между ними.

Пример. Пусть

$$h_1(k_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_1, & k_1 = 0, 1, 2, \\ 8k_1 - 15, & k_1 \geqslant 3, \end{cases} \quad h_2(k_2) = k_2^{3/2},$$

$$h_3(k_3) = k_3^2, \quad h_4(k_4) = 4k_4,$$

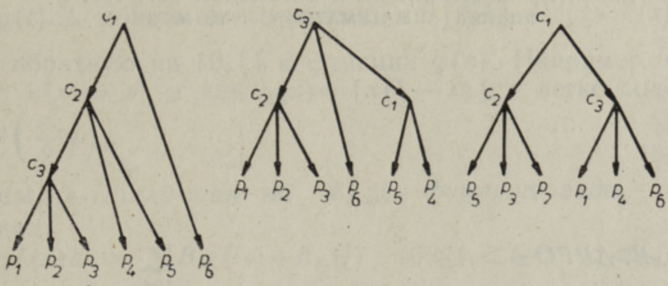
где $k_j \in N$ $(j = 1, \ldots, 4)$, и $m = 4$. Зафиксировано: $\beta = 6$.

При этих данных задача (9) имеет вид

$$\min_{k_1, \ldots, k_4, \alpha} \{\sum_{j=1}^{4} h_j(k_j) \mid \sum_{j=1}^{4} k_j = 5 + \alpha,$$

$$\sum_{j=1}^{4} \delta(k_j) = \alpha, \ \alpha \in N, \ k_j \in N \ (j = 1, \ldots, 4)\},$$

ее решением является вектор $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_4^0, \alpha^0) = (2, 3, 3, 0, 3)$.



На рисунке показаны некоторые иерархии, соответствующие решению k^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К., Теория графов и ее применения, М., 1962.
2. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969.
3. Kulikowski, R., Arch. Automat. i Telemech., 12, № 3, 295 (1967).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/VII 1977