

Б. ОРЕНШТЕЙН

УДК 518 : 519.3 : 62—50

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

B. ORENSTEIN. ÜHE MATEMAATILISE PROGRAMMEERIMISE ÜLESANNETEKLASSI LAHENDAMISEKS SOBIV DEKOMPOSITSIIONALGORITM

B. ORENSTEIN. A DECOMPOSITION ALGORITHM FOR SOLVING A CLASS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

В математическом программировании при кусочно-линейной аппроксимации ограничений часто возникают задачи типа: минимизировать

$$F(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j \leq p, \quad (2)$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

В экономическом аспекте задачу (1)—(3) можно интерпретировать и как частный случай известной задачи распределения дефицитного ресурса.

Пусть функции $f_j(x_j)$ — строго выпуклы и дважды дифференцируемы. Без потери общности можем считать, что $d_j \geq 0$, $j=1, 2, \dots, n$, так как заменой определенных переменных задачу (1)—(3) всегда можно преобразовать таким образом, чтобы коэффициенты стали неотрицательными. При этом замена $x_j \rightarrow \tilde{x}_j = -x_j$ для соответствующих j не нарушает строгую выпуклость функции, поскольку $f_{x_j}'' = f_{\tilde{x}_j}'' > 0$ для всех таких j .

В основе алгоритма решения задачи лежит правило пошагового учета ограничения (3) (этап В). При этом в качестве исходного выбирается решение ослабленной задачи (1)—(2), которое вычисляется на этапе Б с использованием метода множителей Лагранжа. Этап Г учитывает случай, когда ограничение (2) не является существенным.

Схема алгоритма. Обозначим номер шага через i ($i=0, 1, \dots$), текущее значение правой части ограничения (2) через $p^{(i)}$ и индексы оптимизируемых компонент через $J^{(i)}$.

Этап А. Начиная с нулевого шага ($i = 0$) положить $J^{(0)} = \{1, 2, \dots, n\}$; $p^{(0)} = p$. Проверить совместность системы неравенств (2) — (3), определяющих допустимое множество решений

$$R = \{x_j \mid \sum_{j \in J^{(i)}} d_j x_j \leq p^{(i)}; \quad a_j \leq x_j \leq b_j, \quad j \in J^{(i)}\}, \quad (4)$$

и, если неравенство $\sum_{j \in J^{(i)}} d_j a_j \leq p^{(i)}$ выполняется и $R \neq \emptyset$, перейти к этапу Б, если же $R = \emptyset$, то задача не имеет допустимых решений. Этап Б. Найти безусловный минимум $x^{*(i)} = (x_1^{*(i)}, \dots, x_j^{*(i)}, \dots, x_n^{*(i)})$ целевой функции (1) и, если $\sum_{j \in J^{(i)}} d_j x_j^{*(i)} \leq p^{(i)}$, перейти к этапу Г. В противном случае следует определить $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_j^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ и $\lambda^{(i)}$ из системы

$$\begin{aligned} f'_j(x_j) - \lambda^{(i)} d_j &= 0, \quad j \in J^{(i)}, \\ \sum_{j \in J^{(i)}} d_j x_j &= p^{(i)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda^{(i)}$ — неопределенный множитель Лагранжа.

Этап В. 1. Если $\check{J}^{(i)} = \{j \in J^{(i)} \mid x_j^{(i)} < a_j\} \neq \emptyset$, то положить $x_j^{\text{опт}} = a_j$ для $j \in \check{J}^{(i)}$ и, приняв $i = i + 1$, вернуться к этапу Б, на котором $p^{(i+1)} = p^{(i)} - \sum_{j \in \check{J}^{(i)}} d_j a_j$; $J^{(i+1)} = J^{(i)} \setminus \check{J}^{(i)}$.

2. Если начиная с $i = i_0$ окажется, что $J^{(i)} = \emptyset$, но $\hat{J}^{(i)} = \{j \in J^{(i)} \mid x_j^{(i)} > b_j\} \neq \emptyset$, то положить $x_j^{\text{опт}} = b_j$ для $j \in \hat{J}^{(i)}$ и, приняв $i = i + 1$, вернуться к этапу Б, на котором $p^{(i+1)} = p^{(i)} - \sum_{j \in \hat{J}^{(i)}} d_j b_j$;

$J^{(i+1)} = J^{(i)} \setminus \hat{J}^{(i)}$.

3. Если $J^{(i)} = J^{(i)} = \emptyset$, то оптимальное решение задачи (1) — (3) получается как упорядоченная композиция из набора $\{x_j\} = \{x_{j(r)}^{(r)}\}$ $r = 0, 1, \dots, i_1$.

Этап Г. Положить $x_j^{*(i)} = x_j^{(i)}$, $j \in J^{(i)}$, и вернуться к этапу В.

Пример. Минимизировать функцию

$$F(x) = \sum_{j=1}^3 f_j(x_j); \quad f_j(x_j) = (x_j - 1)^2, \quad j \in J^{(0)} = \{1, 2, 3\}, \quad (6)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^3 x_j \leq 0,9; \quad (7)$$

$$0,12 \leq x_1 \leq 0,15,$$

$$0,58 \leq x_2 \leq 0,8, \quad (8)$$

$$0 \leq x_3.$$

Этап А. Задача (6) — (8) имеет допустимое, а следовательно, и оптимальное решение, так как $\sum_{j \in J^{(0)}} d_j a_j = 0,7 < 0,9$. Заметим, что безусловный минимум функции (6) достигается в точке $x^* = (1; 1; 1)$, обеспечивая тем самым жесткость ограничения (7) на каждом шаге.

Этап Б. Рассмотрим систему $\{f'_j(x_j) = 2x_j = \lambda^{(0)}, \quad j \in J^{(0)}\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0,9$ }, решение которой $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0,3$; $\lambda^{(0)} = 0,6$.

Этап В. Так как $x_2^{(0)} < 0,58$, то $\check{J}^{(0)} = \{2\}$, $x_2^{\text{опт}} = 0,58$; $p^{(1)} = 0,9 - 0,58 = 0,32$; $J^{(1)} = \{1, 3\}$.

На этапе В следующего шага, решая систему $\{2x_j = \lambda^{(1)}, j \in J^{(1)}; x_1 + x_3 = p^{(1)} (p^{(1)} = 0,32)\}$, найдем $x_1^{(1)} = x_3^{(1)} = 0,16$; $\lambda^{(1)} = 0,32$. Здесь $\hat{J}^{(1)} = \{1\}$; $x_1^{\text{опт}} = 0,15$. Тогда $x_3^{\text{опт}} = 0,32 - 0,15 = 0,17$ и оптимальное решение задачи (6) — (8) есть $x^{\text{опт}} = (0,15; 0,58; 0,17)$.

Указанным алгоритмом решались конкретные задачи прогнозирования и планирования приема учащихся в систему высшего и среднего специального образования республики [1]. Для решения задач размерности 14 потребовалось в среднем четыре шага.

Сходимость алгоритма не более чем за n шагов следует из самой его схемы, поскольку всегда найдутся натуральные числа r и s такие, что $\check{J}^{(r)} = \hat{J}^{(s)} = \emptyset$, и алгоритм прекратит работу через $t = r + s$ шагов. Но $t \leq n$, так как $r + s \leq n$.

Для доказательства того, что результатом вычисления является оптимальное решение задачи (1) — (3), требуется обосновать правомерность перехода от ослабленной задачи (1) — (2) к рассматриваемой задаче (1) — (3) путем фиксации отдельных переменных на этапе В. Такой поэтапный переход основан на следующих утверждениях.

Утверждение 1. Если $a_j > x_j$ для $j \in \check{J}^{(i)}$, то $x_j^{\text{опт}} = a_j$, $j \in \hat{J}^{(i)}$.

Согласно этому утверждению удастся найти решение т.н. полуослабленной задачи (1) — (3)', где ограничения (3)' имеют вид

$$a_j \leq x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)'$$

Утверждение 2. Если $b_j < x_j$ для $j \in \hat{J}^{(i)}$ ($i \geq i_0$), то $x_j^{\text{опт}} = b_j$, $j \in \hat{J}^{(i)}$.

Второе утверждение позволяет найти решение симметричной полуослабленной задачи (1) — (3)", где ограничения (3)" следующие:

$$x_j \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)''$$

Так как учет ограничений (3)" начинается лишь после выполнения ограничений (3)', а пересчет новых значений x_j для $j \in \hat{J}^{(i)}$ не нарушает условия (2), а следовательно, и (3)', то оптимальное решение задачи (1) — (3)', удовлетворяя ограничениям (3)", является искомым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мээл М., Изв. АН ЭССР, Общ. науки, 25, 3 (1976).

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
31/III 1977