EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 2

УДК 518 : 519.3 : 62—50

Б. ОРЕНШТЕЙН

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

B. ORENSTEIN. ÜHE MATEMAATILISE PROGRAMMEERIMISE ÜLESANNETEKLASSI LAHENDAMISEKS SOBIV DEKOMPOSITSIOONIALGORITM

B. ORENSTEIN. A DECOMPOSITION ALGORITHM FOR SOLVING A CLASS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

В математическом программировании при кусочно-линейной аппроксимации ограничений часто возникают задачи типа: минимизировать

$$F(x)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \leqslant p, \tag{2}$$

$$a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3}$$

В экономическом аспекте задачу (1)—(3) можно интерпретировать и как частный случай известной задачи распределения дефицитного ресурса.

Пусть функции $f_j(x_j)$ — строго выпуклы и дважды дифференцируемы. Без потери общности можем считать, что $d_j \geqslant 0$, $j=1,2,\ldots,n$, так как заменой определенных переменных задачу (1)—(3) всегда можно преобразовать таким образом, чтобы коэффициенты стали неотрицательными. При этом замена $x_j \to \tilde{x}_j = -x_j$ для соответствующих j не нарушает строгую выпуклость функции, поскольку $f''_{\tilde{x}_j} = f''_{x_j} > 0$ для всех таких j.

В основе алгоритма решения задачи лежит правило пошагового учета ограничения (3) (этап В). При этом в качестве исходного выбирается решение ослабленной задачи (1)—(2), которое вычисляется на этапе Б с использованием метода множителей Лагранжа. Этап Г учитывает случай, когда ограничение (2) не является существенным.

Схема алгоритма. Обозначим номер шага через i $(i=0,1,\ldots)$, текущее значение правой части ограничения (2) через $p^{(i)}$ и индексы оптимизируемых компонент через $J^{(i)}$.

Этап А. Начиная с нулевого шага ($i = 0$) положить $J^{(0)} = \{1, 2, \ldots, n\}$; $p^{(0)} = p$. Проверить совместность системы неравенств (2)—(3), определяющих допустимое множество решений

$$R = \{x_j \mid \sum_{j \in J^{(i)}} d_j x_j \leqslant p^{(i)}; \quad a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, \quad j \in J^{(i)}\}, \tag{4}$$

и, если неравенство $\sum\limits_{j \in J^{(i)}} d_j a_j \leqslant p^{(i)}$ выполняется и $R \neq \varnothing$, перейти к этапу Б, если же $R = \varnothing$, то задача не имеет допустимых решений.

Этап Б. Найти безусловный минимум $x^{*(i)} = (x_1^{*(i)}, \ldots, x_j^{*(i)}, \ldots, x_n^{*(i)})$ целевой функции (1) и, если $\sum\limits_{j \in J^{(i)}} d_j x_j^{*(i)} \leqslant p^{(i)}$, перейти к этапу Г. В противном случае следует определить $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \ldots, x_j^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})$ и $\lambda^{(i)}$ из системы

$$\begin{aligned} & f'_j(x_j) - \lambda^{(i)} d_j = 0, \quad j \in J^{(i)}, \\ & \sum_{j \in J^{(i)}} d_j x_j = p^{(i)}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\lambda^{(i)}$ — неопределенный множитель Лагранжа.

Этап В. 1. Если $\check{J}^{(i)} = \{j \in J^{(i)} \mid x_j^{(i)} < a_j\} \neq \varnothing$, то положить $x_j^{\text{опт}} = a_j$ для $j \in \check{J}^{(i)}$ и, приняв $i = i + 1$, вернуться к этапу Б, на котором $p^{(i+1)} = p^{(i)} - \sum\limits_{j \in \check{J}^{(i)}} d_j a_j$; $J^{(i+1)} = J^{(i)} \setminus \check{J}^{(i)}$.

2. Если начиная с $i = i_0$ окажется, что $J^{(i)} = \varnothing$, но $\hat{J}^{(i)} = \{j \in J^{(i)} \mid x_j^{(i)} > b_j\} \neq \varnothing$, то положить $x_j^{\text{опт}} = b_j$ для $j \in \hat{J}^{(i)}$ и, приняв $i = i + 1$, вернуться к этапу Б, на котором $p^{(i+1)} = p^{(i)} - \sum\limits_{j \in \hat{J}^{(i)}} d_j b_j$; $J^{(i+1)} = J^{(i)} \setminus \hat{J}^{(i)}$.

3. Если $J^{(i_0)} = J^{(i_1)} = \varnothing$, то оптимальное решение задачи (1)—(3) получается как упорядоченная композиция из набора $\{x_j\} = \{x_{j(r)}^{(r)}\}$ $r = 0, 1, \ldots, i_1$.

Этап Г. Положить $x_j^{*(i)} = x_j^{(i)}$, $j \in J^{(i)}$, и вернуться к этапу В.

П р и м е р. Минимизировать функцию

$$F(x) = \sum_{j=1}^{3} f_j(x_j); \quad f_j(x_j) = (x_j - 1)^2, \quad j \in J^{(0)} = \{1, 2, 3\}, \tag{6}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{3} x_j \leqslant 0{,}9; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & 0{,}12 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}15, \\ & 0{,}58 \leqslant x_2 \leqslant 0{,}8, \\ & 0 \leqslant x_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Этап А. Задача (6)—(8) имеет допустимое, а следовательно, и оптимальное решение, так как $\sum\limits_{j \in J^{(0)}} d_j a_j = 0{,}7 < 0{,}9$. Заметим, что безусловный минимум функции (6) достигается в точке $x^* = (1; 1; 1)$, обеспечивая тем самым жесткость ограничения (7) на каждом шаге.

Этап Б. Рассмотрим систему $\{f'_j(x_j) \equiv 2x_j = \lambda^{(0)}, \quad j \in J^{(0)};$

$x_1+x_2+x_3=0{,}9\}$, решение которой $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0{,}3$; $\lambda^{(0)}=0{,}6$.

Этап В. Так как $x_2^{(0)}<0{,}58$, то $\check{J}^{(0)}=\{2\}$, $x_2^{\text{опт}}=0{,}58$; $p^{(1)}= =0{,}9-0{,}58=0{,}32$; $J^{(1)}=\{1,3\}$.

На этапе Б следующего шага, решая систему $\{2x_j=\lambda^{(1)},\ j\in J^{(1)};$ $x_1+x_3=p^{(1)}(p^{(1)}=0{,}32)\}$, найдем $x_1^{(1)}=x_3^{(1)}=0{,}16$; $\lambda^{(1)}=0{,}32$. Здесь $\hat{J}^{(1)}=\{1\}$; $x_1^{\text{опт}}=0{,}15$. Тогда $x_3^{\text{опт}}=0{,}32-0{,}15=0{,}17$ и оптимальное решение задачи (6)—(8) есть $x^{\text{опт}}=(0{,}15;\ 0{,}58;\ 0{,}17)$.

Указанным алгоритмом решались конкретные задачи прогнозирования и планирования приема учащихся в систему высшего и среднего специального образования республики [1]. Для решения задач размерности 14 потребовалось в среднем четыре шага.

Сходимость алгоритма не более чем за n шагов следует из самой его схемы, поскольку всегда найдутся натуральные числа r и s такие, что $\check{J}^{(r)}=\hat{J}^{(s)}=\varnothing$, и алгоритм прекратит работу через $t=r+s$ шагов. Но $t\leqslant n$, так как $r+s\leqslant n$.

Для доказательства того, что результатом вычисления является оптимальное решение задачи (1)—(3), требуется обосновать правомерность перехода от ослабленной задачи (1)—(2) к рассматриваемой задаче (1)—(3) путем фиксации отдельных переменных на этапе В. Такой поэтапный переход основан на следующих утверждениях.

Утверждение 1. *Если $a_j>x_j$ для $j\in\check{J}^{(i)}$, то $x_j^{\text{опт}}=a_j$, $j\in\hat{J}^{(i)}$.*

Согласно этому утверждению удается найти решение т. н. полуослабленной задачи (1)—(3)′, где ограничения (3)′ имеют вид

$$a_j\leqslant x_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3$'$}$$

Утверждение 2. *Если $b_j<x_j$ для $j\in\hat{J}^{(i)}$ $(i\geqslant i_0)$, то $x_j^{\text{опт}}=b_j$, $j\in\hat{J}^{(i)}$.*

Второе утверждение позволяет найти решение симметричной полуослабленной задачи (1)—(3)″, где ограничения (3)″ следующие:

$$x_j\leqslant b_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{3$''$}$$

Так как учет ограничений (3)″ начинается лишь после выполнения ограничений (3)′, а пересчет новых значений x_j для $j\in\hat{J}^{(i)}$ не нарушает условия (2), а следовательно, и (3)′, то оптимальное решение задачи (1)—(3)′, удовлетворяя ограничениям (3)″, является искомым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мээл М., Изв. АН ЭССР, Общ. науки, **25**, 3 (1976).

Институт экономики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
31/III 1977