EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 2

УДК 518 : 517.392

А. ЙЫГИ, М. ЛЕВИН

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

A. JÕGI, M. LEVIN. MÄRKUS PARIMATE KVADRATUURVALEMITE KASUTAMISE KOHTA OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDITE LAHENDAMISEL

A. JÕGI, M. LEVIN. EINE BEMERKUNG ÜBER DIE VERWENDUNG DER BESTEN QUADRATURFORMELN FÜR DIE LÖSUNG VON PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Одним из методов решения краевой задачи является следующий. Краевая задача сводится к интегральному уравнению, в котором интеграл вычисляется приближенно по некоторой квадратурной формуле. В полученном приближенном уравнении аргументам придаются значения узлов квадратурной формулы, что приводит к приближенной системе уравнений относительно значений искомой функции в рассматриваемых узлах. Функция восстанавливается из полученных решений этой системы [1–4].

Поскольку ядро интегрального уравнения (соответствующего краевой задаче) часто не обладает хорошими дифференциальными свойствами, оказывается полезным в случае приближенного решения этого уравнения использовать наилучшие на соответствующих множествах функций квадратурные формулы [5]. Проиллюстрируем это утверждение на примерах.

Рассмотрим в области $D=\{(x,y):0\leqslant x,\ y\leqslant 1\}$ задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}\,z(x,y)=\varphi(x,y)+\lambda(x,y)\,z(x,y),\\ z(0,y)\equiv z(1,y)\equiv z(x,0)\equiv z(x,1)\equiv 0,\end{gathered}\tag{1}$$

для которой существование решения предполагается, а функции $\varphi(x,y)$, $\lambda(x,y)$ считаем в D непрерывными. Если ввести в рассмотрение функцию Грина

$$G(s,t)=\begin{cases}s(t-1), & s\leqslant t,\\ t(s-1), & s\geqslant t,\end{cases}$$

то задача (1) может быть записана в виде

$$z(x,y)=\int_0^1\!\!\int_0^1 G(x,t)\,G(y,u)\,\lambda(t,u)\,z(t,u)\,dt\,du+\varphi_1(x,y),\tag{2}$$

где

$$\varphi_1(x, y)=\int_0^1\int_0^1 G(x,t)\,G(y,u)\,\varphi(t,u)\,dt\,du.$$

Пусть

$$\begin{gathered}
x_i=2h\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+i-1\right),\quad y_j=2g\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+j-1\right)\\
(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n),\\
A_{ij}=4hg\quad (i=2,\ldots,m-1;\ j=2,\ldots,n-1),\\
A_{1j}=A_{mj}=A_{i1}=A_{in}=2gh\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{5}{4}+1\right)\\
(i=2,\ldots,m-1;\ j=2,\ldots,n-1),\\
A_{11}=A_{1n}=A_{m1}=A_{mn}=\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{5}{4}\right)^2 gh,\\
h=0{,}5\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}+m-1\right)^{-1},\quad g=0{,}5\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}+n-1\right)^{-1}.
\end{gathered}\tag{3}$$

Вычисляя в (2) двойной интеграл по повторной наилучшей на множестве $W^2{}_{01}L_2$ квадратурной формуле [6] и придавая аргументам x, y значения узлов (3), получаем систему для нахождения приближенных значений искомой функции z в узлах (x_i, y_j):

$$z(x_k, y_l)=\varphi_1(x_k, y_l)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\lambda(x_i, y_j)\,G(x_k, x_i)\,G(y_l, y_j)\,z(x_i, y_j)$$

$$(k=1,\ldots,m;\ l=1,\ldots,n).$$

Восстанавливая приближенно функцию $z(x, y)$ по решениям этой системы, получаем

$$z(x, y)\approx\varphi_1(x, y)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\lambda(x_i, y_j)\,G(x, x_i)\,G(y, y_j)\,z(x_i, y_j).\tag{4}$$

Ошибка этой формулы может быть выписана известными методами [1, 2].

Пример 1. Найти решение задачи (1) при $\varphi(x, y) = (x^4-x^2)(y^3-y)+12y(6x^2-1)$, $\lambda(x, y)=-1$ в точках (0,2327; 0,3497), (0,4063; 0,7829), (0,2547; 0,8064). Эти точки выбраны случайным образом.

Решение по формуле (4) при $m=8$, $n=7$ и сравнение с точным решением дано в табл. 1.

Таблица 1

x	y	z (решение по (4))	Точное значение z	Относительная ошибка, %
0,2327	0,3497	0,015638	0,015723	0,54
0,4063	0,7829	0,041843	0,041771	0,18
0,2547	0,8064	0,017018	0,017110	0,55

Для сравнения в табл. 2 приведены результаты решения этой же задачи при тех же m и n по формуле типа (4), получаемой из (2) повторным применением формулы трапеций (метод, предлагаемый в [4]):

Таблица 2

x	y	z	Относительная ошибка, %
0,2327	0,3497	0,015124	3,8
0,4063	0,7829	0,039954	4,4
0,2547	0,8064	0,016304	4,8

Пример 2. Найти решение задачи (1) при $\varphi(x, y) = (x^2+y)(x^5-x)(y^3-y)+120x^3y$, $\lambda(x, y) = -(x^2+y)$ в точках (0,2327; 0,3497), (0,4063; 0,7829), (0,3239; 0,5136).

Решения при условиях предыдущего примера по формуле (4) и формуле типа (4) получаемой с помощью формулы трапеций, даны соответственно в табл. 3 и 4:

Таблица 3

x	y	z (решение по (4))	Точное значение z	Относительная ошибка, %
0,2327	0,3497	0,071266	0,071221	0,065
0,4063	0,7829	0,119767	0,119775	0,0067
0,3239	0,5136	0,121647	0,121122	0,44

Таблица 4

x	y	z	Относительная ошибка, %
0,2327	0,3497	0,069231	2,8
0,4063	0,7829	0,114355	4,6
0,3239	0,5136	0,118024	2,6

Видим, что применение наилучшей квадратурной формулы дает значительно более точные результаты, чем использование формулы трапеций.

Совершенно также наилучшие квадратурные формулы могут быть применены и при решении уравнений более высоких порядков, чем в задаче (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мысовских И. П., Вестник ЛГУ, Сер. мат., мех. и астрон., вып. 4, 66 (1956).
2. Гавурин М. К., Лекции по методам вычислений, М., 1971.
3. Birkhoff, G., Gordon, W. J., J. Approximat. Theory, 1, 199 (1968).
4. Seifert, P., Beitr. Numer. Math., 2, 193 (1974).
5. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.
6. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. матем., 18, 249 (1969).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 24/II 1977