

Т. МЕРЕССОО

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Рассматривается прямая декомпозиция (без модификации целевых функций в подзадачах) одной задачи нелинейного программирования — т. н. задачи распределения ресурсов. В [1] было обращено внимание на тот факт, что эта задача в общем случае не координируема с помощью принципа прогнозирования взаимодействий [2]. В данной работе к условию координации названного принципа добавляется условие равновесного распределения ресурсов [3, 4] и доказывается достаточность совокупности этих условий для координируемости задачи. Показана также необходимость условия равновесного распределения ресурсов для применимости принципа прогнозирования взаимодействий.

1. Рассмотрим задачу распределения ресурсов в виде \*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(x_i) &\rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n g_i(x_i) &\leq a, \\ x_i &\in X_i \quad (i=1, \dots, n), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $g_i = (g_{1i}, \dots, g_{mi})$ ,  $a = (a_1, \dots, a_m)$ .

Для задачи (1) определим т. н. функции взаимодействия (см. [2]) в виде (ср. [1, 5])

$$K_i(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_j(x_j) \quad (i=1, \dots, n). \quad (2)$$

Разложим задачу (1) на следующие подзадачи ( $i=1, \dots, n$ ) (ср. [1, 3, 4])

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &\rightarrow \min, \\ g_i(x_i) + a_i &\leq a, \\ x_i &\in X_i, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a_i$  — вектор координирующих параметров. Обозначим  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

Предположим, что условия, при которых существуют седловые точки у функций Лагранжа, соответствующих задаче (1) и подзадачам (3) (при интересующих нас значениях  $a_i$ ), выполнены. Обозначим их через

\* Задача нелинейного программирования в аналогичной постановке была исследована в [1, 3–5].

$(\bar{x}; \bar{\lambda}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n; \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$  и  $(x_i(a_i); \lambda^i(a_i)) = (x_i(a_i); \lambda_1^i(a_i), \dots, \lambda_m^i(a_i))$  ( $i = 1, \dots, n$ )\*\* соответственно.

Будем говорить (ср. [2,5]), что при выбранных  $K_i(x)$  и подзадачах (3)

1) к задаче (1) применим принцип прогнозирования взаимодействий, если из предположения выполнения равенств

$$a_i = K_i(x(a)) \quad (i=1, \dots, n) \quad (4)$$

следует

$$x(a) = \bar{x}, \quad (5)$$

где  $x(a) = (x_1(a_1), \dots, x_n(a_n))$ ;

2) задача (1) координируется с помощью принципа прогнозирования взаимодействий, если этот принцип применим и существуют векторы  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) такие, при которых равенства (4) выполняются.

В [1] показано, что к рассматриваемой задаче принцип прогнозирования взаимодействий не применим, т. е. из равенства (4) не обязательно следует равенство (5).

Будем говорить (ср. [3,4]), что распределение ресурсов между подзадачами равновесное, если при выбранном координирующем векторе  $a = (a_1, \dots, a_n)$  выполняются равенства

$$\lambda^i(a_i) = \lambda^j(a_j) \quad (i, j=1, \dots, n).^{***} \quad (6)$$

Докажем, что, заменяя в принципе прогнозирования взаимодействий условия координации (4) системой координации

$$\begin{aligned} a_i &= K_i(x(a)), \\ \lambda^i(a_i) &= \lambda^j(a_j) \quad (i, j=1, \dots, n), \end{aligned} \quad (7)$$

получим модифицированный принцип прогнозирования взаимодействий, который применим к задаче (1), и задача (1) координируема с помощью этого принципа.

2. Покажем, что при наших предположениях модифицированный принцип прогнозирования взаимодействий применим к задаче (1), т. е. из существования вектора  $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ , гарантирующего выполнение условий

$$\bar{a}_i = K_i(x(\bar{a})) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)), \quad (8)$$

$$\lambda^i(\bar{a}_i) = \lambda^j(\bar{a}_j) = \hat{\lambda} \quad (i, j=1, \dots, n),$$

следует, что вектор  $x(\bar{a})$  является решением задачи (1).

Условия седловой точки для подзадачи (3) при  $a_i = \bar{a}_i$  выражаются в виде

$$\begin{aligned} f_i(x_i(\bar{a}_i)) + (\lambda^i, g_i(x_i(\bar{a}_i)) + \bar{a}_i - a) &\leq \\ \leq f_i(x_i(\bar{a}_i)) + (\lambda^i(\bar{a}_i), g_i(x_i(\bar{a}_i)) + \bar{a}_i - a) &\leq \end{aligned} \quad (9)$$

\*\* Мы не предполагаем здесь единственности седловых точек, т. е. в общем случае у нас имеются множества седловых точек  $\bar{X} \times \bar{\Lambda}$  и  $X_i(a_i) \times \Lambda^i(a_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

\*\*\* В общем виде это условие можно выразить следующим образом:  $\Lambda^1(a_1) \cap \dots \cap \Lambda^n(a_n) \neq \emptyset$ , где  $\Lambda^i(a_i)$ , как и ранее, множество векторов оптимальных множителей Лагранжа в подзадаче (3).

$$\leq f_i(x_i) + (\lambda^i (\bar{a}_i), g_i(x_i) + \bar{a}_i - a), \quad \forall \lambda^i \geq 0, \quad \forall x_i \in X_i \\ (i=1, \dots, n).$$

Учитывая условия (8), из неравенств (9) получим

$$f_i(x_i(\bar{a}_i)) + (\lambda^i, \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - a) \leq \\ \leq f_i(x_i(\bar{a}_i)) + (\hat{\lambda}, \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - a) \leq \quad (10) \\ \leq f_i(x_i) + (\hat{\lambda}, g_i(x_i) + \bar{a}_i - a), \quad \forall \lambda^i \geq 0, \quad \forall x_i \in X_i \\ (i=1, \dots, n).$$

Просуммируем неравенства (10) по индексу  $i$ . Обозначим  $\sum_{i=1}^n \lambda^i = \lambda$ . В силу произвольности и неотрицательности векторов  $\lambda^i$  ( $i=1, \dots, n$ ) вектор  $\lambda$  также произволен и неотрицателен. Получим

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{a}_i)) + (\lambda, \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - a) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{a}_i)) + n(\hat{\lambda}, \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - a) \leq \quad (11) \\ \leq \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + (\hat{\lambda}, \sum_{i=1}^n [g_i(x_i) + \bar{a}_i - a]), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x_i \in X_i \\ (i=1, \dots, n).$$

Из условий седловой точки для подзадачи (3) (при  $a_i = \bar{a}_i$ ) следует, что

$$n(\hat{\lambda}, \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - a) = (\hat{\lambda}, \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - a) = 0.$$

Учитывая это, получим

$$(\hat{\lambda}, \sum_{i=1}^n [g_i(x_i) + \bar{a}_i - a]) = (\hat{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - na) = \\ = (\hat{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(x_i) - a) + (\hat{\lambda}, (n-1) [\sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) - a]) = (\hat{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(x_i) - a).$$

Итак, неравенства (11) можем представить в виде (заменяя везде индекс  $j$  на индекс  $i$ )

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{a}_i)) + (\lambda, \sum_{i=1}^n g_i(x_i(\bar{a}_i)) - a) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{a}_i)) + (\hat{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(x_i(\bar{a}_i)) - a) \leq \quad (12)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + (\hat{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(x_i) - a), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x_i \in X_i \quad (i=1, \dots, n).$$

Неравенства (12) являются условиями седловой точки для задачи (1). Следовательно, вектор  $x(\bar{a}) = (x_1(\bar{a}_1), \dots, x_n(\bar{a}_n))$  есть решение задачи (1), т. е.  $x(\bar{a}) = \bar{x}$ , а общий для всех подзадач (3) вектор оптимальных множителей Лагранжа  $\hat{\lambda}$  является вектором оптимальных мно-

жителей Лагранжа для задачи (1). Итак, модифицированный принцип применим.

3. Для координируемости следует показать, что система (7) имеет решение. Пусть известно решение задачи (1)  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и известен соответствующий вектор оптимальных множителей Лагранжа  $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$ . В таком случае

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f_i(\bar{x}_i) + (\lambda, \sum_{i=1}^n g_i(\bar{x}_i) - a) &\leq \sum_{i=1}^n f_i(\bar{x}_i) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(\bar{x}_i) - a) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(x_i) - a), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x_i \in X_i \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая в неравенствах (13)  $x_i = \bar{x}_i$ ,  $i \neq k$ , получим

$$\begin{aligned} f_h(\bar{x}_k) + (\lambda, \sum_{i=1}^n g_i(\bar{x}_i) - a) &\leq f_h(\bar{x}_k) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(\bar{x}_i) - a) \leq \\ &\leq f_h(x_k) + (\bar{\lambda}, g_h(x_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n g_i(\bar{x}_i) - a), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x_k \in X_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Выберем теперь  $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)$  так, чтобы

$$\hat{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_j(\bar{x}_j) \quad (i=1, \dots, n). \quad (15)$$

Из неравенств (14) следует

$$\begin{aligned} f_h(\bar{x}_k) + (\lambda, g_h(\bar{x}_k) + \hat{a}_h - a) &\leq f_h(\bar{x}_k) + (\bar{\lambda}, g_h(\bar{x}_k) + \hat{a}_h - a) \leq \\ &\leq f_h(x_k) + (\bar{\lambda}, g_h(x_k) + \hat{a}_h - a), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x_k \in X_k. \end{aligned}$$

Мы получили условия седловой точки для подзадачи (3) при  $a_k = \hat{a}_k$ , следовательно:

$$\bar{x}_k = x_k(\hat{a}_k), \quad \bar{\lambda} = \lambda^k(\hat{a}_k).$$

Но так как индекс  $k$  произволен, то последние равенства справедливы для  $k = 1, \dots, n$ .

В результате имеем

$$\hat{a}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n g_j(x_j(\hat{a}_j)),$$

$$\lambda^k(\hat{a}_k) = \lambda^j(\hat{a}_j)$$

$$(j, k=1, \dots, n).$$

Таким образом, система (7) имеет решение и задача (1) координируема с помощью модифицированного принципа.

4. Аналогично последнему доказательству можно показать, что при данной декомпозиции равновесное распределение ресурсов является необходимым условием для применения принципа прогнозирования взаимодействий. Действительно, пусть у нас имеется вектор  $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$  такой, что

$$\bar{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n g_j(x_j(\bar{a}_j)) \quad (i=1, \dots, n),$$

и пусть вектор  $x(\bar{a}) = (x_1(\bar{a}_1), \dots, x_n(\bar{a}_n))$  является решением задачи (1). В этом случае для пары  $(x(\bar{a}); \bar{\lambda})$  (где  $\bar{\lambda}$  соответствующий вектор оптимальных множителей Лагранжа в задаче (1)) справедливо (12). Полагая в этих неравенствах  $x_i = x_i(\bar{a}_i)$ ,  $i \neq k$ , находим

$$\begin{aligned} & f_k(x_k(\bar{a}_k)) + (\lambda, \sum_{i=1}^n g_i(x_i(\bar{a}_i)) - a) \leq \\ & \leq f_k(x_k(\bar{a}_k)) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^n g_i(x_i(\bar{a}_i)) - a) \leq \\ & \leq f_k(x_k) + (\bar{\lambda}, g_k(x_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n g_i(x_i(\bar{a}_i)) - a), \quad \forall \lambda \geq 0, \quad \forall x_k \in X_k. \end{aligned}$$

Мы получили условия седловой точки для подзадачи (3) при  $a_k = \bar{a}_k$ , а поскольку индекс  $k$  произволен, то вектор  $\bar{\lambda}$  является вектором оптимальных множителей Лагранжа во всех подзадачах (3) ( $i=1, \dots, n$ ). Следовательно, распределение ресурсов между подзадачами равновесное.

4. Пример (ср. [2, 5]).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + 2x_2) \rightarrow \min \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & x_1 + 4x_2 \leq 5, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что решением этой задачи является  $\bar{x} = \left(\frac{13}{17}, \frac{18}{17}\right)$ . Подзадачи (3) выражаются здесь в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 \rightarrow \min, & \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ & 2x_1 + a_{11} \leq 6, & 3x_2 + a_{12} \leq 6, \\ & x_1 + a_{21} \leq 5, & 4x_2 + a_{22} \leq 5, \\ & x_1 \geq 0; & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Условия координации (7) следующие:

$$a_{11} = 3x_2(a_2), \quad a_{21} = 4x_2(a_2), \quad a_{12} = 2x_1(a_1), \quad a_{22} = x_1(a_1), \quad (17)$$

$$\lambda_1^1(a_1) = \lambda_1^2(a_2), \quad \lambda_2^1(a_1) = \lambda_2^2(a_2). \quad (18)$$

Выберем  $\hat{a}_{11} = 3$ ,  $\hat{a}_{21} = 4$ ,  $\hat{a}_{12} = 2$ ,  $\hat{a}_{22} = 1$ . Понятно, что решениями подзадач являются  $\hat{x}_1 = 1$ ,  $\hat{x}_2 = 1$  и, следовательно, условия (17) удовлетворяются. Однако  $\hat{\lambda}_1^1 = 0$ ,  $\hat{\lambda}_2^1 = 0$ ,  $\hat{\lambda}_1^2 = 0$ ,  $\hat{\lambda}_2^2 = 1/4$ , т. е. при выбранном  $\hat{a}$  распределение ресурсов не равновесное.

Выберем теперь  $\bar{a}_{11} = \frac{3 \cdot 18}{17}$ ,  $\bar{a}_{21} = \frac{4 \cdot 18}{17}$ ,  $\bar{a}_{12} = \frac{2 \cdot 13}{17}$ ,  $\bar{a}_{22} = \frac{13}{17}$ . Легко видеть, что

решениями подзадач являются  $\bar{x}_1 = \frac{13}{17}$ ,  $\bar{x}_2 = \frac{18}{17}$  и условия (17) удовлетворяются.

К тому же, как это легко проверить, удовлетворяются и условия (18):  $\bar{\lambda}_1^1 = \bar{\lambda}_1^2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_2^1 = \bar{\lambda}_2^2 = \frac{4}{17}$ , т. е. распределение ресурсов равновесное.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dirickx, Y. M. I., Jennergren, L. P., Peterson, D. W., IEEE Trans. Syst., Man. and Cybern., **SMC-3**, No. 5, 514 (1973).
2. Месарович М., Мако Д., Такахага И., Теория иерархических многоуровневых систем, М., 1973.
3. Багриновский К. А., В сб.: Математические методы решения экономических задач, Новосибирск, 1971, с. 5.
4. Ten Kate, A., Manag. Sci., **18**, No. 12, 734 (1972).
5. Ульм С., В сб.: Модели и методы анализа экономических целенаправленных систем, Новосибирск, 1977, с. 71.

*Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию  
31/V 1977

T. MERESSOO

#### ÜHEST DEKOMPOSITSIONIMEETODIST RESSURSSIDE JAOTAMISE ÜLESANDE JAOKS

On vaadeldud ressursside jaotamise ülesande otsest dekompositsiooni, kusjuures alamülesannete sihifunktsioone ei ole modifitseeritud. On näidatud, et ülesande koordineerimiseks koostöö ennustamise printsiibi [2] abil on tarvilik ja piisav tasakaalus ressursside jaotus [3].

T. MERESSOO

#### ON A DECOMPOSITION METHOD FOR THE RESOURCE ALLOCATION PROBLEM

A direct decomposition of the resource allocation problem is considered. The cost functions of subproblems are not modified. It is shown that the problem is coordinable by the interaction prediction principle [2] if the balanced allocation of resources [3] is valid.