EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 2

УДК 519.3 : 62—50

Т. МЕРЕССОО

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Рассматривается прямая декомпозиция (без модификации целевых функций в подзадачах) одной задачи нелинейного программирования — т. н. задачи распределения ресурсов. В [1] было обращено внимание на тот факт, что эта задача в общем случае не координируема с помощью принципа прогнозирования взаимодействий [2]. В данной работе к условию координации названного принципа добавляется условие равновесного распределения ресурсов [3, 4] и доказывается достаточность совокупности этих условий для координируемости задачи. Показана также необходимость условия равновесного распределения ресурсов для применимости принципа прогнозирования взаимодействий.

1. Рассмотрим задачу распределения ресурсов в виде *

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \min, \\
\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \leqslant a, \\
x_i \in X_i \quad (i=1, \ldots, n),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $g_i=(g_{1i}, \ldots, g_{mi})$, $a=(a_1, \ldots, a_m)$.
Для задачи (1) определим т. н. функции взаимодействия (см. [2]) в виде (ср. [1, 5])

$$
K_i(x)=\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g_j(x_j) \quad (i=1, \ldots, n). \tag{2}
$$

Разложим задачу (1) на следующие подзадачи ($i=1, \ldots, n$) (ср. [1, 3, 4])

$$
\begin{aligned}
& f_i(x_i) \to \min, \\
& g_i(x_i)+\alpha_i \leqslant a, \\
& x_i \in X_i,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где α_i — вектор координирующих параметров. Обозначим $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Предположим, что условия, при которых существуют седловые точки у функций Лагранжа, соответствующих задаче (1) и подзадачам (3) (при интересующих нас значениях α_i), выполнены. Обозначим их через

* Задача нелинейного программирования в аналогичной постановке была исследована в [1, 3–5].

$(\bar{x};\ \bar{\lambda}) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n;\ \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ и $(x_i(\alpha_i);\ \lambda^i(\alpha_i)) = (x_i(\alpha_i);\ \lambda_1{}^i(\alpha_i), \ldots, \lambda^i{}_m(\alpha_i))$ $(i = 1, \ldots, n)$** соответственно.

Будем говорить (ср. [2, 5]), что при выбранных $K_i(x)$ и подзадачах (3)

1) к задаче (1) применим принцип прогнозирования взаимодействий, если из предположения выполнения равенств

$$\alpha_i = K_i(x(\alpha)) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{4}$$

следует

$$x(\alpha) = \bar{x}, \tag{5}$$

где $x(\alpha) = (x_1(\alpha_1), \ldots, x_n(\alpha_n))$;

2) задача (1) координируема с помощью принципа прогнозирования взаимодействий, если этот принцип применим и существуют векторы α_i $(i = 1, \ldots, n)$ такие, при которых равенства (4) выполняются.

В [1] показано, что к рассматриваемой задаче принцип прогнозирования взаимодействий не применим, т. е. из равенства (4) не обязательно следует равенство (5).

Будем говорить (ср. [3, 4]), что распределение ресурсов между подзадачами равновесное, если при выбранном координирующем векторе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ выполняются равенства

$$\lambda^i(\alpha_i) = \lambda^j(\alpha_j) \qquad (i,\ j=1, \ldots, n).^{***} \tag{6}$$

Докажем, что, заменяя в принципе прогнозирования взаимодействий условия координации (4) системой координации

$$\begin{aligned} &\alpha_i = K_i(x(\alpha)), \\ &\lambda^i(\alpha_i) = \lambda^j(\alpha_j) \qquad (i,\ j=1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{7}$$

получим модифицированный принцип прогнозирования взаимодействий, который применим к задаче (1), и задача (1) координируема с помощью этого принципа.

2. Покажем, что при наших предположениях модифицированный принцип прогнозирования взаимодействий применим к задаче (1), т. е. из существования вектора $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$, гарантирующего выполнение условий

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}_i = K_i(x(\bar{\alpha})) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} g_j(x_j(\bar{\alpha}_j)), \\ &\lambda^i(\bar{\alpha}_i) = \lambda^j(\bar{\alpha}_j) = \hat{\lambda} \qquad (i,\ j=1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{8}$$

следует, что вектор $x(\bar{\alpha})$ является решением задачи (1).

Условия седловой точки для подзадачи (3) при $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ выражаются в виде

$$\begin{aligned} &f_i(x_i(\bar{\alpha}_i)) + (\lambda^i,\ g_i(x_i(\bar{\alpha}_i)) + \bar{\alpha}_i - a) \leqslant \\ &\leqslant f_i(x_i(\bar{\alpha}_i)) + (\lambda^i(\bar{\alpha}_i),\ g_i(x_i(\bar{\alpha}_i)) + \bar{\alpha}_i - a) \leqslant \end{aligned} \tag{9}$$

** Мы не предполагаем здесь единственности седловых точек, т. е. в общем случае у нас имеются множества седловых точек $\bar{X} \times \bar{\Lambda}$ и $X_i(\alpha_i) \times \Lambda^i(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

*** В общем виде это условие можно выразить следующим образом: $\Lambda^1(\alpha_1) \cap \ldots \cap \Lambda^n(\alpha_n) \neq \varnothing$, где $\Lambda^i(\alpha_i)$, как и ранее, множество векторов оптимальных множителей Лагранжа в подзадаче (3).

$$\leqslant f_i(x_i)+(\lambda^i(\bar{\alpha}_i),\ g_i(x_i)+\bar{\alpha}_i-a),\quad \forall\lambda^i\geqslant 0,\quad \forall x_i\in X_i$$
$$(i=1,\ \ldots,\ n).$$

Учитывая условия (8), из неравенств (9) получим

$$\begin{aligned} &f_i(x_i(\bar{\alpha}_i))+(\lambda^i,\ \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{\alpha}_j))-a)\leqslant \\ &\leqslant f_i(x_i(\bar{\alpha}_i))+(\hat{\lambda},\ \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{\alpha}_j))-a)\leqslant \\ &\leqslant f_i(x_i)+(\hat{\lambda},\ g_i(x_i)+\bar{\alpha}_i-a),\quad \forall\lambda^i\geqslant 0,\quad \forall x_i\in X_i \\ &(i=1,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\tag{10}$$

Просуммируем неравенства (10) по индексу i. Обозначим $\sum_{i=1}^n\lambda^i=\lambda$. В силу произвольности и неотрицательности векторов λ^i $(i=1,\ \ldots,\ n)$ вектор λ также произволен и неотрицателен. Получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{\alpha}_i))+(\lambda,\ \sum_{j=1}^n g_j\ (x_j(\bar{\alpha}_j))-a)\leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{\alpha}_i))+n(\hat{\lambda},\ \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{\alpha}_j))-a)\leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n f_i(x_i)+(\hat{\lambda},\ \sum_{i=1}^n[g_i(x_i)+\bar{\alpha}_i-a]),\quad \forall\lambda\geqslant 0,\quad \forall x_i\in X_i \\ &(i=1,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\tag{11}$$

Из условий седловой точки для подзадачи (3) (при $\alpha_i=\bar{\alpha}_i$) следует, что

$$n(\hat{\lambda},\ \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{\alpha}_j))-a)=(\hat{\lambda},\ \sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{\alpha}_j))-a)=0.$$

Учитывая это, получим

$$(\hat{\lambda},\ \sum_{i=1}^n[g_i(x_i)+\bar{\alpha}_i-a])=(\hat{\lambda},\ \sum_{i=1}^n g_i(x_i)+\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n g_j(x_j(\bar{\alpha}_j))-na)=$$

$$=(\hat{\lambda},\ \sum_{i=1}^n g_i(x_i)-a)+(\hat{\lambda},\ (n-1)\ [\sum_{j=1}^n g_j(x_j(\bar{\alpha}_j))-a])=(\hat{\lambda},\ \sum_{i=1}^n g_i(x_i)-a).$$

Итак, неравенства (11) можем представить в виде (заменив везде индекс j на индекс i)

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{\alpha}_i))+(\lambda,\ \sum_{i=1}^n g_i(x_i(\bar{\alpha}_i))-a)\leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n f_i(x_i(\bar{\alpha}_i))+(\hat{\lambda},\ \sum_{i=1}^n g_i(x_i(\bar{\alpha}_i))-a)\leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n f_i(x_i)+(\hat{\lambda},\ \sum_{i=1}^n g_i(x_i)-a),\ \forall\lambda\geqslant 0,\ \forall x_i\in X_i\ \ (i=1,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\tag{12}$$

Неравенства (12) являются условиями седловой точки для задачи (1). Следовательно, вектор $x(\bar{\alpha})=(x_1(\bar{\alpha}_1),\ \ldots,\ x_n(\bar{\alpha}_n))$ есть решение задачи (1), т. е. $x(\bar{\alpha})=\bar{x}$, а общий для всех подзадач (3) вектор оптимальных множителей Лагранжа $\hat{\lambda}$ является вектором оптимальных множителей Лагранжа для задачи (1). Итак, модифицированный принцип применим.

3. Для координируемости следует показать, что система (7) имеет решение. Пусть известно решение задачи (1) $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ и известен соответствующий вектор оптимальных множителей Лагранжа $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)$. В таком случае

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\bar{x}_i) + (\lambda, \sum_{i=1}^{n} g_i(\bar{x}_i) - a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f_i(\bar{x}_i) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^{n} g_i(\bar{x}_i) - a) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) - a), \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall x_i \in X_i \ (i = 1, \ldots, n). \tag{13}$$

Полагая в неравенствах (13) $x_i = \bar{x}_i$, $i \neq k$, получим

$$f_k(\bar{x}_k) + (\lambda, \sum_{i=1}^{n} g_i(\bar{x}_i) - a) \leqslant f_k(\bar{x}_k) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^{n} g_i(\bar{x}_i) - a) \leqslant$$
$$\leqslant f_k(x_k) + (\bar{\lambda}, g_k(x_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} g_i(\bar{x}_i) - a), \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall x_k \in X_k. \tag{14}$$

Выберем теперь $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_n)$ так, чтобы

$$\hat{\alpha}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g_j(\bar{x}_j) \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Из неравенств (14) следует

$$f_k(\bar{x}_k) + (\lambda, g_k(\bar{x}_k) + \hat{\alpha}_k - a) \leqslant f_k(\bar{x}_k) + (\bar{\lambda}, g_k(\bar{x}_k) + \hat{\alpha}_k - a) \leqslant$$
$$\leqslant f_k(x_k) + (\bar{\lambda}, g_k(x_k) + \hat{\alpha}_k - a), \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \forall x_k \in X_k.$$

Мы получили условия седловой точки для подзадачи (3) при $\alpha_k = \hat{\alpha}_k$, следовательно:

$$\bar{x}_k = x_k(\hat{\alpha}_k), \quad \bar{\lambda} = \lambda^k(\hat{\alpha}_k).$$

Но так как индекс k произволен, то последние равенства справедливы для $k = 1, \ldots, n$.

В результате имеем

$$\hat{\alpha}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} g_j(x_j(\hat{\alpha}_j)),$$

$$\lambda^k(\hat{\alpha}_k) = \lambda^j(\hat{\alpha}_j)$$
$$(j, k = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, система (7) имеет решение и задача (1) координируема с помощью модифицированного принципа.

4. Аналогично последнему доказательству можно показать, что при данной декомпозиции равновесное распределение ресурсов является необходимым условием для применения принципа прогнозирования взаимодействий. Действительно, пусть у нас имеется вектор $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ такой, что

$$\bar{a}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} g_j(x_j(\bar{a}_j)) \qquad (i=1, \ldots, n),$$

и пусть вектор $x(\bar{\alpha}) = (x_1(\bar{\alpha}_1), \ldots, x_n(\bar{\alpha}_n))$ является решением задачи (1). В этом случае для пары $(x(\bar{\alpha});\ \bar{\lambda})$ (где $\bar{\lambda}$ соответствующий вектор оптимальных множителей Лагранжа в задаче (1)) справедливо (12). Полагая в этих неравенствах $x_i = x_i(\bar{\alpha}_i)$, $i \neq k$, находим

$$f_k(x_k(\bar{\alpha}_k)) + (\lambda, \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i(\bar{\alpha}_i)) - a) \leqslant$$

$$\leqslant f_k(x_k(\bar{\alpha}_k)) + (\bar{\lambda}, \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i(\bar{\alpha}_i)) - a) \leqslant$$

$$\leqslant f_k(x_k) + (\bar{\lambda}, g_k(x_k) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} g_i(x_i(\bar{\alpha}_i)) - a), \ \ \forall \lambda \geqslant 0, \ \ \forall x_k \in X_k.$$

Мы получили условия седловой точки для подзадачи (3) при $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$, а поскольку индекс k произволен, то вектор $\bar{\lambda}$ является вектором оптимальных множителей Лагранжа во всех подзадачах (3) $(i = 1, \ldots, n)$. Следовательно, распределение ресурсов между подзадачами равновесное.

4. Пример (ср. [2, 5]).

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + 2x_2) \to \min$$

$$\begin{gathered} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 5, \\ x_1 \geqslant 0, \ \ x_2 \geqslant 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что решением этой задачи является $\bar{x} = \left(\frac{13}{17}, \frac{18}{17}\right)$. Подзадачи (3) выражаются здесь в виде

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 \to \min, & \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2 \to \min, \\ 2x_1 + \alpha_{11} \leqslant 6, & 3x_2 + \alpha_{12} \leqslant 6, \\ x_1 + \alpha_{21} \leqslant 5, & 4x_2 + \alpha_{22} \leqslant 5, \\ x_1 \geqslant 0; & x_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Условия координации (7) следующие:

$$\alpha_{11} = 3x_2(\alpha_2), \quad \alpha_{21} = 4x_2(\alpha_2), \quad \alpha_{12} = 2x_1(\alpha_1), \quad \alpha_{22} = x_1(\alpha_1), \tag{17}$$

$$\lambda_1^1(\alpha_1) = \lambda_1^2(\alpha_2), \quad \lambda_2^1(\alpha_1) = \lambda_2^2(\alpha_2). \tag{18}$$

Выберем $\hat{\alpha}_{11} = 3$, $\hat{\alpha}_{21} = 4$, $\hat{\alpha}_{12} = 2$, $\hat{\alpha}_{22} = 1$. Понятно, что решениями подзадач являются $\hat{x}_1 = 1$, $\hat{x}_2 = 1$ и, следовательно, условия (17) удовлетворяются. Однако $\hat{\lambda}_1^1 = 0$, $\hat{\lambda}_2^1 = 0$, $\hat{\lambda}_1^2 = 0$, $\hat{\lambda}_2^2 = 1/4$, т. е. при выбранном $\hat{\alpha}$ распределение ресурсов не равновесное.

Выберем теперь $\bar{\alpha}_{11} = \frac{3 \cdot 18}{17}$, $\bar{\alpha}_{21} = \frac{4 \cdot 18}{17}$, $\bar{\alpha}_{12} = \frac{2 \cdot 13}{17}$, $\bar{\alpha}_{22} = \frac{13}{17}$. Легко видеть, что решениями подзадач являются $\bar{x}_1=\frac{13}{17}$, $\bar{x}_2=\frac{18}{17}$ и условия (17) удовлетворяются.

К тому же, как это легко проверить, удовлетворяются и условия (18): $\bar{\lambda}_1^1=\bar{\lambda}_1^2=0$, $\bar{\lambda}_2^1=\bar{\lambda}_2^2=\frac{4}{17}$, т. е. распределение ресурсов равновесное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirickx, Y. M. I., Jennergren, L. P., Peterson, D. W., IEEE Trans. Syst., Man. and Cybern., SMC-3, No. 5, 514 (1973).
2. Месарович М., Мако Д., Такахара И., Теория иерархических многоуровневых систем, М., 1973.
3. Багриновский К. А., В сб.: Математические методы решения экономических задач, Новосибирск, 1971, с. 5.
4. Ten Kate, A., Manag. Sci., 18, No. 12, 734 (1972).
5. Ульм С., В сб.: Модели и методы анализа экономических целенаправленных систем, Новосибирск, 1977, с. 71.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
31/V 1977

T. MERESSOO

ÜHEST DEKOMPOSITSIOONIMEETODIST RESSURSSIDE JAOTAMISE ÜLESANDE JAOKS

On vaadeldud ressursside jaotamise ülesande otsest dekompositsiooni, kusjuures alamülesannete sihifunktsioone ei ole modifitseeritud. On näidatud, et ülesande koordineerimiseks koostöö ennustamise printsiibi [2] abil on tarvilik ja piisav tasakaalus ressursside jaotus [3].

T. MERESSOO

ON A DECOMPOSITION METHOD FOR THE RESOURCE ALLOCATION PROBLEM

A direct decomposition of the resource allocation problem is considered. The cost functions of subproblems are not modified. It is shown that the problem is coordinable by the interaction prediction principle [2] if the balanced allocation of resources [3] is valid.