

Р. ТЕННО

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ СО СЛУЧАЙНЫМ ДРЕЙФОМ ПАРАМЕТРОВ

Адаптация модели к изменениям свойств промышленных объектов — важная для практики задача. В зависимости от наличия или отсутствия прогноза дрейфа возможны два подхода к решению задачи. Алгоритм, разработанный в [1], предполагает детерминированный характер дрейфа и является весьма чувствительным к точности задания траектории [2]. Однако дрейф промышленных объектов имеет, как правило, стохастический характер. В данной статье выводится новый алгоритм адаптации модели объекта к дрейфу с заданными вероятностными закономерностями.

1. Постановка задачи

Пусть интересующий нас объект описывается в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots, n, \dots$ линейным по параметрам уравнением

$$v_n = z_n^T \beta_n, \quad (1)$$

где v_n , z_n и β_n — выход, векторы входа и коэффициентов объекта в момент времени n соответственно. Последовательность $\{\beta_n\}$ рассматривается как пространственно независимый, обобщенно-стационарный временной ряд, описываемый в момент времени n параметрической моделью [3] вида

$$\begin{aligned} \beta_n &= \tilde{\beta}_n + \mu, & \tilde{\beta}_n &= \tilde{\beta}_{n-1}(1) + a_n, \\ \tilde{\beta}_{n-1}(1) &= \sum_{v=1}^l \varphi_v \tilde{\beta}_{n-v} - \sum_{v=1}^q \Theta_v a_{n-v}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь μ — безусловное среднее временного ряда; $\beta_{n-1}(1)$ — прогноз дрейфа с момента $n-1$ на один шаг вперед; a_n — гауссов белый шум в момент n с нулевым средним и дисперсией D ; Θ_v и φ_v — матрицы параметров оператора скользящего среднего $\Theta(B)$ порядка q и нестационарного оператора авторегрессии $\varphi(B)$ порядка l при сдвиге назад на v . Применяемые нами матрицы параметров π_v и Ψ_v являются элементами операторов

$$\pi(B) = \varphi^{-1}(B)\Theta(B), \quad \Psi(B) = \pi^{-1}(B). \quad (3)$$

Допускается, что ошибка измерения выхода h_n обладает свойством аддитивности с неизменным нормальным распределением

$$y_n = v_n + h_n, \quad h_n \sim N_1(0, r). \quad (4)$$

Величины h_n , z_n и β_n принимаются попарно-независимыми. Квадратичная функция потерь выбирается в виде

$$W(b_n, \beta_n) = [b_n - \beta_n]^T [b_n - \beta_n], \quad (5)$$

где b_n — условная оценка вектора истинных параметров β_n в текущий момент времени.

Ставится задача синтеза оптимального в смысле минимума полного риска

$$R = M \left\{ \sum_{n=0}^N W(b_n, \beta_n) \right\} \quad (6)$$

алгоритма оценки неизвестных дрейфующих параметров при ограничении, задаваемом его физической реализуемостью.

2. Алгоритм оценки дрейфующих параметров объекта

Согласно факторизационному критерию [4], прогноз дрейфа $\beta_{n-1}(1)$ является достаточной статистикой параметра β_n в момент $n-1$. Поступлением текущих наблюдений от входа и выхода объекта прогноз $\beta_{n-1}(1)$ уточняется. Таким образом, полный риск предсказания параметров объекта выражается в виде

$$R = \sum_{n=0}^N \int_{\Omega(\cdot)} W(b_n, \beta_n) P(b_n, \beta_n | y_n, z_n, \beta_{n-1}(1)) P(y_n, z_n, \beta_{n-1}(1)) d\Omega, \quad (7)$$

где $P(\cdot)$ — безусловное распределение величин y_n , z_n и $\beta_{n-1}(1)$; $P(\cdot/\cdot)$ — условное распределение векторов b_n и β_n при фиксированных y_n , z_n , $\beta_{n-1}(1)$; $\Omega(\cdot)$ — область интегрирования по b_n , β_n , y_n , z_n и $\beta_{n-1}(1)$.

Нетрудно показать, что найденная минимизацией функционала (7) оценка параметров объекта

$$b_n^* = b_n^*(y_n, z_n, \beta_{n-1}(1)) \quad (8)$$

имеет ряд оптимальных свойств (несмещенность, достаточность, эффективность и т. д.) и простой алгоритм вычисления. Однако оценка эта физически не реализуема, поскольку данные о предыстории дрейфа β_{n-1} , β_{n-2} , ..., необходимые для вычисления прогноза $\beta_{n-1}(1)$, как правило, отсутствуют.

Чтобы получить реализуемую стратегию, вместо прогноза реальной предыстории $\beta_{n-1}(1)$ следует использовать его оценку $b_{n-1}(1)$, найденную с помощью оценок дрейфа на предыдущих тактах

$$b_{n-1}(1) = \sum_{v=1}^l \varphi_v \tilde{b}_{n-v} - \sum_{v=1}^q \Theta_v a_{n-v} + \mu, \quad (9)$$

$$b_t = \begin{cases} b_t^H, & t < 0, \\ b_t + \mu, & t \geq 0, \end{cases} \quad a_t = \begin{cases} a_t^H, & t < 0, \\ b_t - b_{t-1}(1), & t \geq 0, \end{cases}$$

где b_t^H , a_t^H — определенным образом восстановленные начальные условия разностного уравнения (см. раздел 3), а затем произвести дополнительное усреднение в (7) по разности $\beta_{n-1}(1) - b_{n-1}(1)$, состоящей из двух компонент: ошибки обучения $\Delta_n^{0\delta}$ и ошибки отслеживания

$\Delta_n^{\text{от}}$. Первую порождает неопределенность начальных условий b_t^H, a_t^H ($t < 0$), а вторую — неточное отслеживание дрейфа на предыдущих тактах.

Записав полученный в результате искажения $\beta_{n-1}(1)$ ошибкой $\Delta_n^{\text{об}}$ вектор прогноза в виде

$$b_{n-1}^{\text{об}}(1) = \sum_{v=1}^l \varphi_v \tilde{b}_{n-v}^{\text{об}} - \sum_{v=1}^q \Theta_v a_{n-v}^{\text{об}}, \quad (10)$$

$$b_t^{\text{об}} = \begin{cases} b_t^H, & t < 0, \\ \beta_t, & t \geq 0, \end{cases} \quad a_t^{\text{об}} = \begin{cases} a_t^H, & t < 0, \\ b_t^{\text{об}} - b_{t-1}^{\text{об}}(1), & t \geq 0, \end{cases}$$

определим суммарную ошибку

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Delta_n^{\text{об}} + \Delta_n^{\text{от}} = \beta_{n-1}(1) - b_{n-1}(1) = \\ &= [\beta_{n-1}(1) - b_{n-1}^{\text{об}}(1)] + [b_{n-1}^{\text{об}}(1) - b_{n-1}(1)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно выражению (7), усреднение риска R по ошибкам (11) дает

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n=0}^N \int_{\Omega(b_n, \beta_n, \beta_{n-1}(1), \\ & \quad (b_{n-1}^{\text{об}}(1), y_n, z_n, b_{n-1}(1))} W(b_n, \beta_n) P(b_n, \beta_n, \beta_{n-1}(1), b_{n-1}^{\text{об}}(1) / y_n, z_n, b_{n-1}(1)) \times \\ & \quad \times P(y_n, z_n, b_{n-1}(1)) d\Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

В Приложении доказывается, что алгоритм оценки дрейфующих параметров объекта, минимизирующий полный риск (12), имеет вид

$$\begin{aligned} b_t &= b_{t-1}(1) + \Gamma_t z_t [y_t - z_t^T b_{t-1}(1)], \\ \Gamma_t &= [r + z_t^T K_t z_t]^{-1} K_t, \\ K_t &= D + D_t^{\text{от}} + D_t^{\text{об}}, \\ D_t^{\text{от}} &= \sum_{v=1}^t \pi_v D_{t-v} \pi_v^T, \\ D_t &= r \Gamma_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $b_{t-1}(1)$ — оценка параметра β_t с момента $t-1$, на один шаг вперед, определяемая формулами (9); Γ_t — шаг коррекции; K_t и D_t — дисперсии оценок $b_{t-1}(1)$ и b_t ; $D_t^{\text{об}}$ и $D_t^{\text{от}}$ — дисперсии ошибок обучения и отслеживания соответственно. $D_t^{\text{об}}$ определяется по формуле (П 12).

В силу нестационарности объекта шаг коррекции параметров, а также дисперсия ошибок отслеживания к нулю не стремятся. Дисперсия же ошибок обучения по мере устранения начальной неопределенности, напротив, приближается к нулю. В зависимости от степени значимости ошибок обучения по сравнению с ошибками отслеживания работа алгоритма разделяется на два режима — обучения и отслеживания. Иногда в связи с кратковременностью режима обучения и отсутствием требования оптимальности работы алгоритма разумно начиная с первых тактов отказаться от точного учета ценности априорной информации и применить для расчета упрощенные формулы в пределе $D_t^{\text{об}} = 0$.

3. Восстановление начальных условий

При точном задании начальных условий $\{b_t^H = \beta_t, t = [-l, -1]\}$, $\{a_t^H = \alpha_t, t = [-q, -1]\}$ режим обучения в работе алгоритма отсутствует. В практике такая ситуация не реальна, т. е. надобность в разумном выборе начальных условий существует всегда.

Импульсы белого шума предсказать нельзя, поэтому априорные оценки $\{a_t^H, t = [-q, -1]\}$ приравниваются к их безусловным математическим ожиданиям

$$a_t^H = M\{a_t\} = 0. \quad (14)$$

Априорные значения дрейфующих коэффициентов $\{b_t^H, t = [-l, -1]\}$ могут также восстанавливаться приравниванием к безусловному математическому ожиданию временного ряда $\{\beta_t\}$

$$b_t^H = M\{\beta_t\} = \mu. \quad (15)$$

Достоинством такого приближения является отсутствие надобности в наблюдениях по оцениванию начальных условий, недостатком — грубость оценок, если дрейф по характеру близок к нестационарному процессу.

4. Пример

Продемонстрируем адаптацию модели на одномерном имитационном объекте со спецификацией

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_{0t} + z_{1t}\beta_{1t} + h_t, \\ \beta_{0t} &= -0,5\tilde{\beta}_{0t-1} - 0,5\alpha_{0t-1} + \alpha_{0t} + 2, \\ \beta_{1t} &= 0,7\beta_{1t-1} + \alpha_{1t} + 1, \end{aligned} \quad (16)$$

$$h_t, \alpha_{1t} \sim N_1(0, 0.15), \alpha_{0t} \sim N_1(0, 0.25), z_{1t} \sim N_1(2, 1).$$

На рис. 1 и 2 непрерывными линиями изображены реализации дрейфа наклона $\{\beta_{1t}, t = 0, \dots, 50\}$ и аддитивного шума $\{\beta_{0t}, t = 0, \dots, 50\}$. Соответствующие оценки параметров, найденные с помощью алгоритма (13), показаны пунктирными линиями.

Проведенный статистический анализ неувязок

$$e_t = v_t - z_t^T b_t \quad (17)$$

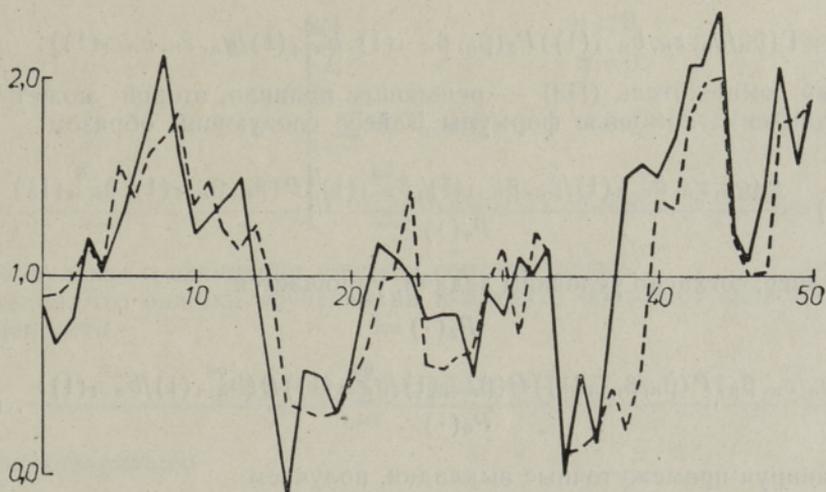
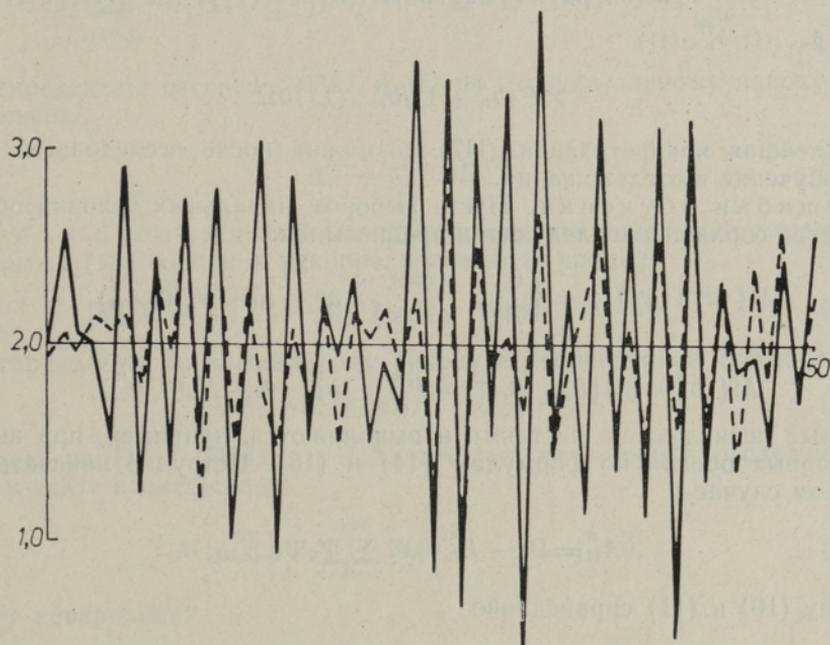
не обнаружил значимого отклонения выборочного среднего от нуля и временной корреляции между неувязками. Несмотря на сравнительно высокий уровень шумов, алгоритм успешно отслеживает стохастически дрейфующие коэффициенты, что недостижимо другими известными методами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод алгоритма оценки дрейфующих параметров объекта

Полный риск предсказания параметров объекта R выражается через сумму удельных рисков R_n :

$$R = M\left\{\sum_{n=0}^N W(b_n, \beta_n)\right\} = \sum_{n=0}^N M\{W(b_n, \beta_n)\} = \sum_{n=0}^N R_n, \quad (\text{П1})$$

Рис. 1. Дрейф параметра наклона β_{1t} и его оценка b_{1t} .Рис. 2. Дрейф аддитивного шума β_{0t} и его оценка b_{0t} .

где R_n , согласно (12), имеет вид

$$R_n = \int_{\Omega} W(b_n, \beta_n) P_1(b_n, \beta_n, \beta_{n-1}(1), b_{n-1}^{0\sigma}(1) / y_n, z_n, b_{n-1}(1)) \times \\ \times P_0(y_n, z_n, b_{n-1}(1)) d\Omega. \quad (\text{П2})$$

Применение теоремы умножения вероятностей ко второму сомножителю подынтегрального выражения дает

$$P_1(\cdot) = \Gamma(b_n/y_n, z_n, b_{n-1}(1)) P_2(\beta_n, \beta_{n-1}(1), b_{n-1}^{об}(1)/y_n, z_n, b_{n-1}(1)). \quad (П3)$$

Первый сомножитель (П3) — решающее правило, второй может быть представлен с помощью формулы Байеса следующим образом:

$$P_2(\cdot) = \frac{P(y_n, z_n, b_{n-1}(1)/\beta_n, \beta_{n-1}(1), b_{n-1}^{об}(1)) P(\beta_n, \beta_{n-1}(1), b_{n-1}^{об}(1))}{P_0(\cdot)}. \quad (П4)$$

Последнее, согласно условиям задачи, упрощается

$$P_2(\cdot) = \frac{P(y_n/z_n, \beta_n) P(\beta_n/\beta_{n-1}(1)) P(\beta_{n-1}(1)/b_{n-1}^{об}(1)) P(b_{n-1}^{об}(1)/b_{n-1}(1))}{P_0(\cdot)}. \quad (П5)$$

Комбинируя промежуточные выкладки, получаем

$$R_n = \int_{\Omega(y_n, b_n)} \kappa_n \Gamma(b_n/y_n, z_n, b_{n-1}(1)) d\Omega, \quad (П6)$$

$$\kappa_n = \int_{\Omega(\beta_n, \beta_{n-1}(1), b_{n-1}^{об}(1))} W(b_n, \beta_n) P(y_n/z_n, \beta_n) P(\beta_n/\beta_{n-1}(1)) P(\beta_{n-1}(1)/b_{n-1}^{об}(1)) \times$$

$$\times P(b_{n-1}^{об}(1)/b_{n-1}(1)) d\Omega. \quad (П7)$$

Дальнейшая конкретизация (П7) возможна после исследования ошибок обучения и отслеживания.

Ошибки обучения. Пусть выбором начальных условий обеспечивается соблюдение следующих предпосылок:

$$M\{(a_t^H) (a_s^H)^T\} = \begin{cases} 0, & t \neq s \\ A_{tt}^H, & t = s \end{cases}, \quad a_t^H - \alpha_t \sim N_3(0, A_{tt}^H), \quad (П8)$$

$$M\{[b_t^H - \beta_t][b_s^H - \beta_s]^T\} = P_{ts}^H, \quad b_t^H - \beta_t \sim N_3(0, P_{tt}^H),$$

которые не являются жесткими и выполняются, например, при выборе априорных оценок по формулам (14) и (15). Нетрудно показать, что в таком случае

$$A_{tt}^H = D, \quad P_{ts}^H = D \sum_{v=0}^{\infty} \Psi_v \Psi_{v-(s-t)}^T.$$

В силу (10) и (11) справедливо

$$\Delta_n^{об} = \sum_{v=1}^l \varphi_v (b_{n-v}^{об} - \beta_{n-v}) - \sum_{v=1}^q \Theta_v (a_{n-v}^{об} - \alpha_{n-v}). \quad (П9)$$

Пропуская несложные, но громоздкие преобразования и привлекая метод математической индукции, выразим ошибку обучения в текущий момент через начальные условия (для случая $l = q$):

$$\Delta_n^{об} = \sum_{t=1}^q V_n(t) \Delta_{-t}^H, \quad (П10)$$

где

$$\Delta_{-t}^H = \varphi_t (b_{-t}^H - \beta_{-t}) - \Theta_t (a_{-t}^H - \alpha_{-t}),$$

$$V_n(t) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ I, & n = 0, \\ \sum_{s=1}^q \Theta_s V_{n-s}(t), & n \geq q \text{ или } t = q, \\ I - \sum_{s=1}^{q-t} \Theta_s V_{n-s}(t), & n < q \text{ и } t \neq q, \end{cases}$$

$0, I$ — нулевая и единичная матрица соответственно.

Очевидно, что ошибки обучения на n -м такте обладают свойством несмещенности

$$M\{\Delta_n^{0\bar{b}}\} = \sum_{t=1}^q V_n(t) M\{\Delta_{-t}^H\} = 0, \quad (\text{П11})$$

имеют ковариацию

$$\begin{aligned} D_n^{0\bar{b}} &= M\{(\Delta_n^{0\bar{b}})(\Delta_n^{0\bar{b}})^T\} = \sum_{s,t=1}^q V_n(t) M\{(\Delta_{-t}^H)(\Delta_{-s}^H)^T\} V_n^T(s) = \\ &= \sum_{s,t=1}^q V_n(t) [\Phi_t^H P_{ts}^H \Phi_s^T] V_n^T(s) + \sum_{t=1}^q V_n(t) [\Theta_t^H A_{tt}^H \Theta_t^T] V_n^T(t) \end{aligned} \quad (\text{П12})$$

и распределены согласно (П8) и (П10) по нормальному закону распределения

$$\Delta_n^{0\bar{b}} \sim N_3(0, D_n^{0\bar{b}}). \quad (\text{П13})$$

Ошибки отслеживания. Доказуемо, что найденные с помощью алгоритма (13) оценки b_t некоррелированы во времени

$$M\{[b_t - \beta_t][b_s - \beta_s]^T\} = 0 \quad \forall s \neq t, s, t = 0, 1, \dots \quad (\text{П14})$$

и распределены по нормальному закону с несмещенным средним

$$b_t \sim N_3(\beta_t, D_t), \quad D_t = r\Gamma_t. \quad (\text{П15})$$

Поэтому из (11), (П14) и (П15) следует, что ошибки отслеживания на n -м такте несмещенные

$$M\{\Delta_n^{0T}\} = \sum_{v=1}^n \pi_v M\{b_{n-v}^{0\bar{b}} - b_{n-v}\} = 0, \quad (\text{П16})$$

имеют ковариацию

$$\begin{aligned} D_n^{0T} &= M\{(\Delta_n^{0T})(\Delta_n^{0T})^T\} = \sum_{v=1}^n \pi_v M\{[b_{n-v}^{0\bar{b}} - b_{n-v}][b_{n-v}^{0\bar{b}} - b_{n-v}]^T \pi_v^T\} = \\ &= \sum_{v=1}^n \pi_v D_{n-v} \pi_v^T \end{aligned} \quad (\text{П17})$$

и распределены по нормальному закону распределения

$$\Delta_n^{0T} \sim N_3(0, D_n^{0T}). \quad (\text{П18})$$

Уравнение (П7) может быть конкретизировано с учетом свойств ошибок и условий задачи. Получим

$$\begin{aligned} \kappa_n = & c^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [b_n - \beta_n]^T [b_n - \beta_n] \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\beta_n - \beta_{n-1}(1)]^T D^{-1} \times \right. \\ & \times [\beta_n - \beta_{n-1}(1)] - \frac{1}{2r} [y_n - z_n^T \beta_n]^2 - \frac{1}{2} [\beta_{n-1}(1) - b_{n-1}^{об}(1)]^T (D_n^{от})^{-1} \times \\ & \times [\beta_{n-1}(1) - b_{n-1}^{об}(1)] - \frac{1}{2} [b_{n-1}^{об}(1) - b_{n-1}(1)]^T (D_n^{от})^{-1} \times \\ & \left. \times [b_{n-1}^{об}(1) - b_{n-1}(1)] \right\} d\beta_n d\beta_{n-1}(1) db_{n-1}^{об}(1), \\ & c = (2\pi)^{3\alpha+1} r |D| |D_n^{об}| |D_n^{от}|, \end{aligned} \quad (П19)$$

где α — размерность объекта.

Решающее правило на $n = N$ -м такте следовало бы определить из условия минимума удельного риска $R_{n=N}$, но в силу регулярности оптимальной байесовской стратегии [5], оно определяется из условия минимума функционала (П19).

Решение интеграла (П19), согласно [6], выражается в виде

$$\begin{aligned} \kappa_n = & \{ [b_n - \varepsilon_n^{-1} (r(b_{n-1}(1) - \mu) + K_n z_n (y_n - z_n^T \mu))]^2 + \varepsilon_n^{-1} r K_n \} \times \\ & \times \varepsilon_n^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon_n^{-1} (y_n - z_n^T b_{n-1}(1))^2 \right\}, \end{aligned} \quad (П20)$$

где $\varepsilon_n = r + z_n^T K_n z_n$, $K_n = D + D_n^{от} + D_n^{об}$.

В результате минимизации последнего получим правило уточнения оценок на $(n = N)$ -м такте

$$b_n = b_{n-1}(1) + \Gamma_n z_n (y_n - z_n^T b_{n-1}(1)), \quad \Gamma_n = \varepsilon_n^{-1} K_n. \quad (П21)$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемая система нейтральна, поскольку

$$R_n = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_n^* dy_n = |\varepsilon_n^{-1} r K_n|, \quad (П22)$$

где κ_n^* — минимальное значение функции (П20) по b_n , поэтому алгоритм уточнения (П21) во времени $t = 0, 1, \dots, n, \dots$ не изменяется [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З., Каплинский А. И., Ларинов К. А., Техническая кибернетика, № 5, 9 (1970).
2. Велев К. Д., Автоматика и телемеханика, № 8, 40 (1975).
3. Бокс Дж., Дженкинс Г., Анализ временных рядов. Прогноз и управление, М., 1974.
4. Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, М., 1974.
5. Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, М., 1966.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1962.

R. TENNO

**JUHUSLIKULT MUUTUVATE PARAMEETRITEGA
OBJEKTIDE IDENTIFITSEERIMINE**

Artiklis on käsitletud statistilise otsustusteooria kasutamist objekti juhuslikult ajas muutuvate parameetrite hindamiseks. On analüüsitud juhtu, kus objekti väljund on mõõdetud aditiivse müraga, ning esitatud mudeli adapteerimise algoritm ja teoreetilisi seisukohti-illustreeriv näide.

R. TENNO

**IDENTIFICATION OF PLANTS HAVING STOCHASTIC
TIME-VARYING PARAMETERS**

The application of the theory of statistical decisions to problems of estimating stochastic time-varying parameters of plants is discussed. A case is analysed when the plant output is measured with a random additive noise. The author proposes an adaption algorithm of the model. The theoretical assertions are illustrated by an example.