EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.2.02

УДК 530.12 : 531.51

В. УНТ

ИНТЕГРАЛЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ С МЕТРИКОЙ ПЛОСКОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

На основании результатов [1] находится общее решение скалярного волнового уравнения и уравнений Максвелла в пространстве-времени с метрикой слабой плоской гравитационной волны. Это решение обобщает известные формулы Кирхгофа и запаздывающего потенциала.

1. Введение

Уравнение Д'Аламбера *

$$\Box\Phi = 4\pi\varrho,\qquad \Box\Phi \equiv \Phi_{,00} - \Phi_{,ii} \tag{1}$$

имеет решение в виде запаздывающего потенциала, к которому добавляется поверхностный интеграл, зависящий от данных Коши:

$$\Phi(x_0^\alpha) = \int \varrho(x^\beta) R^{-1}\delta(t - t_0 + R)\, d^4x + \text{поверхностный интеграл}. \tag{2}$$

Здесь $x_0{}^\alpha$ — координаты точки, в которой ищется решение, δ — дельта-функция, $d^4x \equiv dtdxdydz$, $R^2 = (x^i - x_0{}^i)(x^i - x_0{}^i)$, x^i — прямоугольные декартовы координаты. Используются единицы, в которых скорость света $c = 1$. При $\varrho = 0$ выражение (2) — формула Кирхгофа.

В настоящей работе запишем скалярное волновое уравнение и уравнения Максвелла на фоне метрики слабой плоской гравитационной волны и найдем их решения в виде обобщенного запаздывающего потенциала (или обобщенной формулы Кирхгофа)

$$\Phi(x_0^\alpha) = \int \varrho(x^\beta) S\delta(t - t_0 + \tau)\, d^4x + \text{поверхностный интеграл}. \tag{3}$$

Сравнивая выражения (2) и (3), видим, что в искривленном пространстве-времени функция расстояния $R(x^i, x_0{}^k)$ заменяется двумя новыми функциями τ и S, из которых τ входит в выражение для светового ко-

---

* Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3; по дважды встречающемуся индексу производится суммирование; $\{x^\alpha\} \equiv \{t, x^i\} \equiv \{t, x, y, z\}$; $\Phi_{,\alpha} \equiv \dfrac{\partial\Phi}{\partial x^\alpha} \equiv \Phi_{,x^\alpha}$, x^i — прямоугольные декартовы координаты.

нуса, а S пропорциональна яркостному параметру. Вычисление функций τ и S — основная цель данной статьи.

При выводе решения (3) воспользуемся идеями С. Л. Соболева [2], развитыми нами в [1], где найдено интегральное уравнение, эквивалентное волновому уравнению с переменными коэффициентами. В случае плоских фоновых гравитационных волн ядро интегрального уравнения равно нулю и поэтому решение (3) получается сразу. Равенство нулю ядра в интересующем нас частном случае связано с отсутствием рассеяния излучения «на кривизне» пространства-времени, т. е. с выполнимостью принципа Гюйгенса, установленного в [3–6].

2. Уравнения поля

Запишем скалярное волновое уравнение и уравнения Максвелла на фоне метрики

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - (1+h)\,dy^2 - 2f\,dy\,dz - (1-h)\,dz^2. \tag{4}$$

Здесь функции $h = h(t+x)$ и $f = f(t+x)$ — малые величины первого порядка, квадратами которых будем пренебрегать. Не будем учитывать и обратное воздействие изучаемых волновых возмущений на фоновую метрику (4).

Оператор Д'Аламбера (1) просто обобщается на случай искривленного пространства-времени и при произвольной метрике $g_{\alpha\beta}$ и связности $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ принимает вид (см. [7], § 53)

$$\hat{\Box}\Phi \equiv g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu\nu} - \Gamma^{\mu}\Phi_{,\mu}, \tag{5}$$

где $\Gamma^{\mu} \equiv g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. В случае метрики (4) имеем $\Gamma^{\mu} = 0$ и скалярное волновое уравнение

$$g^{\alpha\beta}\Phi_{,\alpha\beta} = 4\pi\varrho(x^{\alpha}), \tag{6}$$

где

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+h & f \\ 0 & 0 & f & -1-h \end{pmatrix}. \tag{7}$$

При обобщении уравнений Д'Аламбера для потенциалов электромагнитного поля A_{α} на случай искривленного пространства-времени получаем, как правило, систему уравнений, где искомые переменные A_{α} не разделяются. Следуя Дж. Сингу [8], имеем

$$g^{\mu\nu}A_{\alpha,\mu\nu} - \Gamma^{\mu}A_{\alpha,\mu} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}A_{\sigma,\nu} = 0.$$

Иногда трудности, связанные с неразделимостью искомых переменных, удается обойти, исходя из волновых уравнений не для потенциалов, а для напряженностей электрического и магнитного полей. Это и будет сделано ниже.

Введем определенные линейные комбинации реперных компонент электрического и магнитного векторов, т. н. спиноры электромагнитного поля Φ_A, $A = 0, 1, 2$, и сформулируем уравнения Максвелла для спиноров на фоне метрики (4). Не останавливаясь на общей спинорной формулировке теории Максвелла, ограничимся с самого начала частным случаем метрики (4). Воспользуемся следующей локальной квазиортогональной тетрадой (i — мнимая единица)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}l_\mu &= (1, \quad 1, \quad 0, \quad 0),\\
\sqrt{2}n_\mu &= (1, \ -1, \quad 0, \quad 0),\\
\sqrt{2}m_\mu &= \left\{0,\ 0,\ 1+\frac{1}{2}(h+if),\ i\left[1-\frac{1}{2}(h+if)\right]\right\}
\end{aligned} \tag{8}
$$

и реперным вектором $\overline{m}_\mu$, компоненты которого комплексно сопряженны с компонентами вектора m_μ. Выполняется соотношение

$$g_{\mu\nu}=l_\mu n_\nu+n_\mu l_\nu-m_\mu\overline{m}_\nu-\overline{m}_\mu m_\nu.$$

Следуя Э. Т. Ньюмэну и Р. Пенроузу [9], введем спиноры

$$
\begin{aligned}
\Phi_0 &\equiv F_{\mu\nu}l^\mu m^\nu,\\
\Phi_1 &\equiv \frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu+\overline{m}^\mu m^\nu),\\
\Phi_2 &\equiv F_{\mu\nu}\overline{m}^\mu n^\nu,
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля.

Прямым вычислением находим ненулевые коэффициенты вращения векторов тетрады (8) (запятая сверху за символом обозначает производную по аргументу)

$$\lambda\equiv -n_{\mu;\nu}\overline{m}^\mu\overline{m}^\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}(h'-if'),\qquad \overline{m}_{\mu;\nu}n^\mu\overline{m}^\nu=\lambda. \tag{10}$$

Введем обозначения ** $D\varphi\equiv\varphi_{,\mu}l^\mu$, $\Delta\varphi\equiv\varphi_{,\mu}n^\mu$, $\delta\varphi\equiv\varphi_{,\mu}m^\mu$, $\overline{\delta}\varphi\equiv\varphi_{,\mu}\overline{m}^\mu$. В интересующем нас случае уравнения Максвелла принимают вид (общие формулы без источников приведены, напр., в Приложении к работе Э. Т. Ньюмэна и Р. Пенроуза [9])

$$
\begin{aligned}
D\Phi_1-\overline{\delta}\Phi_0 &= -\frac{1}{2}J_\mu l^\mu,\\
D\Phi_2-\overline{\delta}\Phi_1 &= -\lambda\Phi_0-\frac{1}{2}J_\mu\overline{m}^\mu,\\
\delta\Phi_1-\Delta\Phi_0 &= -\frac{1}{2}J_\mu m^\mu,\\
\delta\Phi_2-\Delta\Phi_1 &= -\frac{1}{2}J_\mu n^\mu.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Элиминируя Φ_1 из первого и третьего уравнений (11), имеем такое же уравнение, как и в скалярном случае

$$
\begin{aligned}
g^{\mu\nu}\Phi_{0,\mu\nu} &= \sigma_0,\\
\sigma_0 &\equiv (DJ_\mu)m^\mu-(\delta J_\mu)l^\mu.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Допустим, что интеграл уравнения (12) найден. Введя вместо x и t новые координаты $\eta=t-x$, $\xi=t+x$, можем записать остальные спиноры в виде

$$\Phi_1=F_1(\xi,y,z)+\sqrt{2}\int\left(\overline{\delta}\Phi_0-\frac{1}{2}J_\mu l^\mu\right)d\eta, \tag{13}$$

** Мы не стали менять традиционных обозначений Ньюмэна—Пенроуза, но следует помнить, что во введении δ означает дельта-функцию.

$$\Phi_2 = F_2(\xi, y, z) + \sqrt{2}\int\left(\bar{\delta}\Phi_1 - \lambda\Phi_0 - \frac{1}{2} J_\mu \bar{m}^\mu\right) d\eta, \tag{14}$$

где F_1 и F_2 — функции интегрирования. Спиноры Φ_1 и Φ_2 можем вычислить еще из следующих уравнений, являющихся следствием системы (11):

$$g^{\mu\nu}\Phi_{1,\mu\nu} = \sigma_1, \tag{15}$$

$$\sigma_1 \equiv -\lambda\delta\Phi_0 - \frac{1}{2}\triangle(J_\mu l^\mu) + \frac{1}{2}\bar{\delta}(J_\mu m^\mu),$$

$$g^{\mu\nu}\Phi_{2,\mu\nu} = \sigma_2, \tag{16}$$

$$\sigma_2 \equiv -\lambda\delta\Phi_1 - \triangle(\lambda\Phi_0) - \frac{1}{2}\triangle(J_\mu \bar{m}^\mu) + \frac{1}{2}\delta(J_\mu n^\mu).$$

Решения последних уравнений даются выражением (3), которое не имеет произвольных функций интегрирования. Взамен их приходится вычислять пространственные интегралы, содержащие протяженные источники в виде известных спиноров поля.

Таким образом, в электромагнитном случае задача сводится к интегрированию уравнений (12), (15) и (16), которые совпадают со скалярным уравнением (6).

В [1] показано, что дифференциальное уравнение (6) эквивалентно интегральному уравнению

$$\Phi(\underset{0}{x^\alpha}) = \int S[\varrho]\,d^3x - \frac{1}{4\pi}\int [\Phi]\hat{M}^* S\,d^3x + \frac{1}{4\pi}\int [P^i]\,dx^j\,dx^k, \tag{17}$$

$\operatorname{sign} ijk = 1$, $d^3x = dx dy dz$, квадратные скобки означают, что функции, заключенные в скобки, нужно брать на световом конусе $t_0 = t + \tau$;

$$P^i \equiv S g^{ik}\Phi_{|k} - (g^{ik}S)_{|k}\Phi + 2\Phi_{,t_0} S g^{ik} t_{0,k}, \tag{18}$$

где $\Phi_{|k}$ — внутренняя производная на световом конусе.

Далее найдем световой конус и функцию S. Так как $\hat{M}^*S = 0$, то оператор $\hat{M}$ из [1] переписывать не будем.

3. Световой конус

Пусть

$$u(x^\alpha, \underset{0}{x^\beta}) = 0 \tag{19}$$

— уравнение светового конуса, вершина которого находится в точке x_0^α, т. е. это есть уравнение движущейся поверхности фронта волны, которая сходится в точку x_0^α. Как известно, функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$g^{\alpha\beta} u_{,\alpha} u_{,\beta} = 0. \tag{20}$$

Выше мы ограничились приближенной фоновой метрикой (7), где h и f — малые поправки первого порядка к метрике Минковского $\eta^{\alpha\beta}$. Фактически мы разложили метрический тензор $g^{\alpha\beta}$ в ряд по степеням гравитационной постоянной (индекс под символом обозначает порядок величины члена)

$$g^{\alpha\beta} = \underset{0}{g^{\alpha\beta}} + \underset{1}{g^{\alpha\beta}} + \ldots, \tag{21}$$

где $\underset{0}{g}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, а точками, как здесь, так и в дальнейшем, обозначим члены второго и высших порядков. Выполним такое же разложение для u

$$u = \underset{0}{u} + \underset{1}{u} + \ldots \,. \tag{22}$$

Подставляя ряды (21) и (22) в уравнение (20), имеем

$$(\eta^{\alpha\beta} + \underset{1}{g}^{\alpha\beta} + \ldots)(\underset{0}{u}_{,\alpha} + \underset{1}{u}_{,\alpha} + \ldots)(\underset{0}{u}_{,\beta} + \underset{1}{u}_{,\beta} + \ldots) = 0. \tag{23}$$

Члены нулевого порядка определяют световой конус пространства Минковского

$$\underset{0}{u} = t - t_0 + R. \tag{24}$$

Введем обозначения $k_\alpha \equiv u_{,\alpha}$, $K_\alpha \equiv \underset{0}{k}_\alpha \equiv \underset{0}{u}_{,\alpha}$, $K^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} K_\beta$.

Выписывая из соотношения (23) члены первого порядка, получаем дифференциальное уравнение с частными производными для искомой функции

$$K^\alpha \underset{1}{u}_{,\alpha} + \frac{1}{2} \underset{1}{g}^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta = 0, \tag{25}$$

которое эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dP = \frac{dx^0}{K^0} = \frac{dx^1}{K^1} = \frac{dx^2}{K^2} = \frac{dx^3}{K^3} = -\frac{d\underset{1}{u}}{\frac{1}{2} \underset{1}{g}^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta}. \tag{26}$$

Решение последней системы следующее:

$$x^\alpha = \underset{0}{x}^\alpha + K^\alpha P, \tag{27}$$

$$K^\alpha = \left(1, -\frac{x^i - x_0^i}{R}\right), \tag{28}$$

$$\underset{1}{u} = -\frac{1}{2} \int_0^P \underset{1}{g}^{\alpha\beta} K_\alpha K_\beta \, dP. \tag{29}$$

Отметим, что вдоль характеристик в рассматриваемом приближении K_α можно считать постоянным, а

$$\underset{1}{g}^{\alpha\beta}(t+x) = \underset{1}{g}^{\alpha\beta}(t_0 + K^0 P + x_0 + K^1 P).$$

Из формул (27) и (28) следует, что $P = -R$. Как видно из матрицы (7), $\underset{1}{g}^{\alpha\beta}$ определяются функциями h и f. Введем вспомогательные величины

$$H(\xi, \xi_0) \equiv \frac{1}{P} \int_0^P h(P')\, dP', \tag{30}$$

$$F(\xi, \xi_0) \equiv \frac{1}{P} \int_0^P f(P')\, dP', \tag{31}$$

где $\xi = t + x$, $\xi_0 = t_0 + x_0$. Например, если $h = \alpha \sin\omega(t + x)$ (α — малый постоянный параметр, ω — постоянная частота), то

$$H = -\alpha \frac{\cos\omega\xi - \cos\omega\xi_0}{\omega(\xi - \xi_0)}. \tag{32}$$

Теперь можем записать интеграл уравнения (25)

$$\underset{1}{u} = R(HA + FB), \tag{33}$$

$$A \equiv \frac{1}{2}[(y - y_0)^2 - (z - z_0)^2] R^{-2}, \tag{34}$$

$$B \equiv (y - y_0)(z - z_0) R^{-2}, \tag{35}$$

и уравнение (19) принимает вид

$$t - t_0 + \tau = 0, \tag{36}$$

где

$$\tau = R(1 + HA + FB), \tag{37}$$

$$\underset{0}{\tau} = R, \quad \underset{1}{\tau} = R(HA + FB).$$

Воспользовавшись соотношением $t - t_0 + R = 0$, из выражений для H и F можно элиминировать t или t_0. Связанные с этим проблемы рассматриваются в Приложении.

4. Функция Соболева

В [1] показано, что функция Соболева удовлетворяет уравнению

$$k^\alpha S_{,\alpha} + ES = 0, \tag{38}$$

$$\lim_{x^\alpha \to x_0^\alpha} S\tau = 1. \tag{39}$$

При метрике (4) имеем

$$E = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} u_{,\alpha\beta} - R^{-1}(hA + fB) - 2h_{,t}A - 2f_{,t}B - u_{,\alpha 0}K^\alpha. \tag{40}$$

Будем искать функцию S в виде ряда

$$S = \underset{0}{S} + \underset{1}{S} + \ldots,$$

где члены n-го порядка пропорциональны n-й степени малого параметра.

В нулевом приближении $\underset{0}{\tau} = R$, $\underset{0}{E} = -\frac{1}{R}$. Отсюда и из условия нормировки (39) следует $\underset{0}{S} = \frac{1}{R}$. В первом приближении

$$K^\alpha \underset{1}{S}_{,\alpha} - R^{-1}\underset{1}{S} + w = 0, \tag{41}$$

$$wR^2 = -2(hA + fB) - 2R(Ah_{,0} + Bf_{,0}) + \\ + \frac{1}{2}R\eta^{\alpha\beta}\underset{1}{u}_{,\alpha\beta} - R\underset{1}{u}_{,\alpha 0}K^\alpha + \underset{1}{u}_{,0}. \tag{42}$$

Если $H=H(t+x)$, $F=F(t+x)$, то

$$wR^2=(H_{,t}-h_{,t})RA+(F_{,t}-f_{,t})RB+(H-h)A+(F-f)B. \tag{43}$$

Учитывая, что характеристики уравнения (41) совпадают с характеристиками уравнения (25), можем сразу записать

$$\frac{d\underset{1}{S}}{dP}+\frac{1}{P}\underset{1}{S}+w=0. \tag{44}$$

Решение уравнения (44) следующее:

$$\underset{1}{S}=\frac{C}{P}-\frac{1}{P}\int_0^P P'wdP', \tag{45}$$

где C — постоянная интегрирования. При вычислении интеграла (45) воспользуемся равенствами

$$\frac{dH}{dP}=-\frac{H}{P}+\frac{h}{P}, \quad \frac{dF}{dP}=-\frac{F}{P}+\frac{f}{P},$$

$$\frac{\partial G(t+x)}{\partial t}=\frac{1}{K^0+K^1}\frac{dG}{dP},$$

которые справедливы вдоль характеристик. Имеем

$$\underset{1}{S}=\frac{1}{P}\Big\{C-\frac{A}{K^0+K^1}[h(P)-H(P)]-\frac{B}{K^0+K^1}[f(P)-F(P)]+$$
$$+A[H(P)-H(0)]+B[F(P)-F(0)]\Big\}. \tag{46}$$

Условие нормировки (39) дает в первом приближении

$$\lim_{P\to 0}\underset{1}{S}P=AH(0)+BF(0).$$

Так как $H(0)=h(0)$, $F(0)=f(0)$, то

$$C=AH(0)+BF(0).$$

Элиминируя из выражения (46) параметр P и подставляя C, получаем окончательно

$$S=\frac{1}{R}\Big[1+\frac{A(h-H)}{K^0+K^1}-AH+\frac{B(f-F)}{K^0+K^1}-BF\Big]. \tag{47}$$

Отметим, что при больших R функции H и F в выражении (47) могут быть опущены, так как они убывают быстрее функций h и f.

Прямые вычисления дают $\hat{M}^*S=0$. Этим поставленная нами задача решена. Искомое решение дается интегралом (3), а входящие в него функции S и τ — соотношениями (47) и (37).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Различные формы уравнения светового конуса и инвариантность функции Соболева

1. С. Л. Соболев [2] предполагает, что в случае линейного элемента

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ik}(x^\alpha)\,dx^i dx^k \tag{П.1}$$

уравнение светового конуса можно представить в виде ***

$$t - t_0 + \tau(x^i, x^k_0) = 0. \tag{П.2}$$

То, что это не всегда так, следует уже из специального вида нашего светового конуса

$$t - t_0 + R + RHA = 0, \tag{П.3}$$

$$H = -\alpha\frac{\cos\omega(t+x) - \cos\omega(t_0+x_0)}{\omega(t+x-t_0-x_0)}. \tag{П.4}$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение (П.3) невозможно линеаризировать относительно t и t_0 одновременно. Вследствие этого требуется дополнительное обоснование законности некоторых наших выкладок. Мы приведем соотношения (П.5) и (П.6), играющие роль леммы, и покажем, что один и тот же световой конус может быть представлен различными аналитическими выражениями. Затем докажем, что при вычислении функции Соболева можно пользоваться любым из этих выражений.

2. Пусть $G(t, x^i, t_0, x_0{}^i)$ — произвольная дифференцируемая функция восьми переменных. Введем следующие обозначения (они применяются только в Приложении):

$$\{G(t, x^i, t_0, x^i_0\} \equiv G(t, x^i, t+R, x^i_0),$$

$$[G(t, x^i, t_0, x^i_0] \equiv G(t_0 - R, x^i, t_0, x^i_0).$$

Следуя правилу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\{G\}_{,\alpha} = \{G_{,\alpha}\} + \{G_{,t_0}K_\alpha\}, \tag{П.5}$$

$$[G]_{,\alpha} = [G_{,\alpha}] - [G_{,t}K_\alpha]. \tag{П.6}$$

Так как K_α не зависит от t и t_0, то его можно вынести за скобки.

3. Световой конус. Покажем, что если функция $\underset{1}{u}(x^\alpha, x_0{}^\beta)$ удовлетворяет уравнению светового конуса (25), то этому же уравнению удовлетворяют и функции $[\underset{1}{u}]$ и $\{\underset{1}{u}\}$. Доказательство вытекает из соотношений

$$\{\underset{1}{u}\}_{,\alpha}K^\alpha = \{\underset{1}{u}_{,\alpha}\}K^\alpha + \{\underset{1}{u}_{,t_0}\}K_\alpha K^\alpha,$$

$$[\underset{1}{u}]_{,\alpha}K^\alpha = [\underset{1}{u}_{,\alpha}]K^\alpha - [\underset{1}{u}_{,t}]K_\alpha K^\alpha,$$

$$K_\alpha K^\alpha = 0.$$

*** Более точно, С. Л. Соболев рассматривает уравнение светового конуса в виде $t - t_0 - \tau = 0$, вследствие чего при $\tau > 0$ решение волнового уравнения получается в виде опережающего потенциала. С точки зрения данного Приложения различие в знаке несущественно.

Следует сделать одно уточнение. В уравнение (25) входит заданная функция $\underset{1}{g}^{\alpha\beta}(t, x^i)$. При переходе от $\underset{1}{u}$ или $\{\underset{1}{u}\}$ к $[\underset{1}{u}]$ замена аргумента t на $t_0 - R$ необходима и в функции $\underset{1}{g}^{\alpha\beta}$, т. е. значения метрического тензора следует брать на фиксированном световом конусе.

4. О различии между функциями $[H]$ и $\{H\}$. Вывод первой фундаментальной формулы в [1] базируется на переходе от старых координат $x^\alpha = (t, x^i)$ к новым $\tilde{x}^\alpha = (u = t_0, x^i)$. В случае линейного элемента (4) с $f = 0$ преобразования координат $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^\alpha)$, $x^0 = x^0(\tilde{x}^\alpha)$ следующие:

$$u = t + R + R\{H\}A, \tag{П.7}$$

$$t = u - R - R[H]A. \tag{П.8}$$

Специального рассмотрения требует вопрос, когда пользоваться функцией $\{H\}$, а когда функцией $[H]$. Например, $k_\alpha = u_{,\alpha} = (t + R + R\{H\}A)_{,\alpha}$, а при расчетах на фиксированном световом конусе t нужно заменить правой стороной равенства (П.8). При этом $\{H\}_{,\alpha} \neq [H]_{,\alpha}$. Но иногда функции H, $[H]$ и $\{H\}$ взаимно заменимы. Это имеет место в случае величин, зависящих только от внутренних свойств светового конуса $u = \mathrm{const}$. На фиксированном световом конусе функции H, $\{H\}$ и $[H]$ численно равны ****, как и их внутренние производные. Например,

$$[H_{|i}] = [\{H\}_{|i}]; \qquad \{H\}_{|\alpha} K^\alpha = \{H_{|\alpha}\} K^\alpha$$

и т. д. Далее покажем, что функция Соболева определяется также внутренними свойствами светового конуса.

5. Функция Соболева S. Из рассуждений при выводе уравнения (38) для S следует, что в выражении (42) вместо функции $\underset{1}{u}$ всюду должна быть функция $\{\underset{1}{u}\}$, которая вносится соотношением (П.7). Покажем, что допустима не только произведенная выше замена $\{\underset{1}{u}\}$ на $\underset{1}{u}$, но и использование функции $[\underset{1}{u}]$.

Из третьего пункта Приложения и уравнения (25) получаем

$$\{\underset{1}{u}\}_{,\alpha 0} K^\alpha = \{\underset{1}{u}_{,\alpha 0}\} K^\alpha + \{\underset{1}{u}_{,t_0 \alpha}\} K^\alpha,$$

$$[\underset{1}{u}]_{,\alpha 0} K^\alpha = 0.$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, покажем, что

$$\eta^{\alpha\beta}\{\underset{1}{u}\}_{,\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}\{\underset{1}{u}_{,\alpha\beta}\} + 2\{\underset{1}{u}_{,\alpha t_0}\} K^\alpha - \frac{2}{R}\{\underset{1}{u}_{,t_0}\},$$

$$\eta^{\alpha\beta}[\underset{1}{u}]_{,\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}[\underset{1}{u}_{,\alpha\beta}] - 2[\underset{1}{u}_{,\alpha t}] K^\alpha + \frac{2}{R}[\underset{1}{u}_{,t}].$$

Воспользовавшись приведенными выше соотношениями и формулами (П.5) и (П.6), нетрудно убедиться в том, что определяемая уравнением (44) и соотношением (42) функция Соболева $\underset{1}{S}$ инвариантна относительно замены $\{\underset{1}{u}\}$ на $\underset{1}{u}$ или $[\underset{1}{u}]$.

**** Это равенство имеет место с точностью до членов первого порядка, как и остальные соотношения данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Unt, V., Kuusk, P., ENSV TA Toimet., Füüs. Matem., 25, 234 (1976).
2. Soboleff, S., Матем. сб. (Recueil Mathématique), **1(43)**, No. 1, 39 (1936).
3. Günther, P., Arch. Rational. Mech. Anal., 18, 103 (1965).
4. McLenaghan, R. G., Proc. Cambridge Philos. Soc., 65, 139 (1969).
5. Künzle, H. P., Proc. Cambridge Philos. Soc., 64, 779 (1968).
6. Ibragimov, N. H., Mamontov, E. V., C. R. Acad. Sci., 270, 456 (1970).
7. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961.
8. Синг Дж., Общая теория относительности, М., 1963.
9. Newman, E. T., Penrose, R., J. Math. Phys., 3, 566 (1962).

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/VI 1977

V. UNT

LAINEVÕRRANDI INTEGRAALID TASASE GRAVITATSIOONILAINE AEGRUUMIS

On leitud skalaarse lainevõrrandi ja Maxwelli võrrandite lahend aegruumis, mille meetrika määravad nõrgad tasased gravitatsioonilained. Saadud lahend üldistab Kirchhoffi valemi ja retardeeritud potentsiaali avaldise kõverale aegruumile.

V. UNT

INTEGRALS OF WAVE EQUATIONS IN SPACE-TIME OF PLANE-FRONTED GRAVITATIONAL WAVES

A general solution of the wave equation (6), (7) is given by expressions (3) (or (17), with $\hat{M}^*S=0$), (37) and (47). The solution generalizes the well-known expression for retarded potential and the Kirchhoff formula.