EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.2.01

УДК 530.12 : 531.51

А. КОППЕЛЬ

К ВОПРОСУ О КАЛИБРОВКАХ ТЕТРАДНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ (СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА С НЬЮТОНОВЫМ ВРЕМЕНЕМ)

В данной работе, пользуясь тетрадным формализмом и аппаратом внешних дифференциальных форм Картана, мы выведем основные формулы для исследования свойств гравитационных полей (Г-полей) с точки зрения систем отсчета, где время определяется как ньютоново [1–3]. Нашей главной целью является изучение взаимоотношений между основными характеристиками Г-полей, заданными в свободно падающих ортореперах Минковского, и характеристиками, заданными в ортореперах, связанных с пространственными точками произвольного тела отсчета. Отметим, что тетрадные величины, вычисляемые в упомянутых двух типах реперов, относятся по существу к определенным неполным наборам калибровочных условий для тетрадных потенциалов Г-поля, исследованным в работах [4–5], а именно к т. н. кинеметрической и хронометрической калибровкам соответственно.

1. Исходные понятия, формулы, уравнения

Будем исходить из следующих известных понятий, формул и уравнений.

Пусть локальная связь между *неголономным* реперным полем Минковского $\{x, \boldsymbol{e}_{(\alpha)}\}$ и *голономным* (координатным) реперным полем $\{x, \boldsymbol{e}_{\nu}\}$ в римановом V_4 задается формулами *

$$\boldsymbol{e}_{(\alpha)} = z^{\mu}_{(\alpha)} \boldsymbol{e}_{\mu}, \quad \boldsymbol{e}_{\nu} = z^{(\beta)}_{\nu} \boldsymbol{e}_{(\beta)}, \quad \boldsymbol{e}^{(\beta)} = z^{(\beta)}_{\nu} \boldsymbol{e}^{\nu}, \quad \boldsymbol{e}^{\mu} = z^{\mu}_{(\alpha)} \boldsymbol{e}^{(\alpha)}, \tag{1.1}$$

причем

$$z^{\mu}_{(\alpha)} z^{(\beta)}_{\mu} = \delta^{(\beta)}_{(\alpha)}, \quad z^{(\alpha)}_{\mu} z^{\nu}_{(\alpha)} = \delta^{\nu}_{\mu}, \tag{1.2}$$

а $z^{(\alpha)}_{\mu} = z^{(\alpha)}_{\mu}(x^{\nu})$. Бесконечно малое перемещение в V_4 описывается в локальных реперах формулой $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \omega^{(\alpha)} \boldsymbol{e}_{(\alpha)} = \mathrm{d}x^{\mu} \boldsymbol{e}_{\mu}$, где

$$\omega^{(\alpha)} = z^{(\alpha)}_{\mu} \, \mathrm{d}x^{\mu} \tag{1.3}$$

— *базисные 1-формы.* Для метрической формы (м-формы) имеем

* В данной работе греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — значения 1, 2, 3. Индексы, заключенные по одному в круглые скобки, относятся к локальным реперам Минковского. Внешние круглые и квадратные скобки означают соответственно симметрирование и альтернирование. Запятая с индексом означает дифференцирование по соответствующей координате.

$$ds^2 = d\mathbf{S}\, d\mathbf{S} = g_{(\alpha)(\beta)}\omega^{(\alpha)}\omega^{(\beta)} = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{1.4}$$

В данной работе примем

$$g_{(\alpha)(\beta)} = \mathrm{diag}(-c^2, 1, 1, 1). \tag{1.5}$$

Исходя из заданных $\omega^{(\alpha)}$ и $g_{(\alpha)(\beta)}$, *1-формы связности*

$$\omega^{(\alpha)}_{(\beta)} = g^{(\alpha)(\gamma)}\omega_{(\gamma)(\beta)} = g^{(\alpha)(\gamma)}\Gamma_{(\gamma)(\beta)(\lambda)}\omega^{(\lambda)} \tag{1.6}$$

и *2-формы кривизны*

$$\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)} = g^{(\alpha)(\gamma)}\Omega_{(\gamma)(\beta)} = \frac{1}{2} g^{(\alpha)(\gamma)}R_{(\gamma)(\beta)(\varkappa)(\lambda)}\omega^{(\varkappa)} \wedge \omega^{(\lambda)} \tag{1.7}$$

вычисляются из уравнений структуры Картана для V_4

$$d \wedge \omega^{(\alpha)} + \omega^{(\alpha)}_{(\beta)} \wedge \omega^{(\beta)} = 0, \tag{1.8}$$

$$d \wedge \omega^{(\alpha)}_{(\beta)} + \omega^{(\alpha)}_{(\gamma)} \wedge \omega^{(\gamma)}_{(\beta)} = \Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}. \tag{1.9}$$

Здесь $\Gamma_{(\gamma)(\beta)(\lambda)}$ — *коэффициенты связности* (коэффициенты вращения Риччи), а $R_{(\gamma)(\beta)(\varkappa)(\lambda)}$ — неголономные *компоненты тензора кривизны.* В силу $dg_{(\alpha)(\beta)} = 0$ в данном случае имеет место

$$\omega_{((\alpha)(\beta))} = \Gamma_{((\alpha)(\beta))(\gamma)}\omega^{(\gamma)} = 0, \tag{1.10}$$

следовательно,

$$\omega_{(\alpha)(\beta)} = \Gamma_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}\,\omega^{(\gamma)} = (\Gamma_{(\alpha)[(\beta)(\gamma)]} + \Gamma_{(\beta)[(\gamma)(\alpha)]} - \Gamma_{(\gamma)[(\alpha)(\beta)]})\,\omega^{(\gamma)}. \tag{1.11}$$

Антисимметричные величины $\Gamma_{(\alpha)[(\beta)(\gamma)]}$ получаются после внешнего дифференцирования и разложения по $\omega^{(\beta)} \wedge \omega^{(\gamma)}$ из первых уравнений структуры (1.8). После определения $\omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$ 2-формы кривизны $\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}$ вычисляются из (1.9).

На языке дифференциальных форм *уравнения Эйнштейна* имеют вид

$$\varepsilon_{(\alpha)(\lambda)(\mu)(\nu)}\omega^{(\lambda)} \wedge \omega^{(\mu)} \wedge \Omega^{(\nu)}_{(\beta)} =$$

$$= \frac{16\pi G}{c^4}\left(T_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2} g_{(\alpha)(\beta)}T \right)\omega^{(0)} \wedge \omega^{(1)} \wedge \omega^{(2)} \wedge \omega^{(3)}. \tag{1.12}$$

Здесь $T_{(\alpha)(\beta)}$ — тензор энергии-импульса материи, характеризующий источники Г-поля, c — скорость света и G — гравитационная постоянная. Если голономные компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ удовлетворяют уравнениям (1.12), то они называются *метрическими потенциалами* (м-потенциалами) Г-поля. Соответствующие этим м-потенциалам величины $z^{(\alpha)}_{\mu}$ как компоненты 4-векторов относительно голономных реперов ((α) — номер 4-вектора) будем называть *тетрадными потенциалами* (т-потенциалами) Г-поля.

Физический смысл величин $\Gamma_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ и $R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\lambda)}$ явствует прежде всего из уравнений геодезических линий и уравнений геодезического отклонения. Например, уравнениям для мировых линий свободных пробных частиц можно придать следующий 3-мерный вид

$$\frac{D}{\alpha\, d\tau} U^{(i)} + \alpha\Gamma^{(i)}_{(0)(0)} + 2\Gamma^{(i)}_{((0)(s))} U^{(s)} = 0, \tag{1.13}$$

причем τ — собственное время пробной частицы, $U^{(\alpha)}=\frac{\omega^{(\alpha)}}{d\tau}$,

$$\alpha=\frac{\omega^{(0)}}{d\tau}=\left(1-\frac{u^{(i)}u^{(i)}}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad DU^{(i)}\equiv dU^{(i)}+\Gamma^{(i)}_{((s)(p))}\omega^{(s)}U^{(p)},$$

а $u^{(i)}=\frac{\omega^{(i)}}{\omega^{(0)}}=\frac{U^{(i)}}{\alpha}$ — 3-скорость пробной частицы в локальном неголономном репере Минковского.

2. Гравитационное поле в свободно падающих реперах. Кинеметрическая калибровка тетрадных потенциалов

С целью получить физически глубоко обоснованный метод анализа взаимоотношений между релятивистскими и нерелятивистскими Г-полями в качестве преимущественных Х. Керес рассматривает голономные системы отсчета, определяемые конгруэнциями свободно падающих материальных частиц [1–3]. В данной работе мы вводим «свободно падающие системы отсчета», полагая, что любая из этих систем определяется полем свободно падающих ортореперов Минковского [6].

В локальном ортореперe Минковского $\{x, \overset{*}{e}_{(\alpha)}\}$, связанном со свободно падающей материальной точкой, но относительно которого координатный репер $\{x, \overset{*}{e}_{\nu}\}$ движется произвольным образом, бесконечно малое перемещение можно задать в специальном виде $dS=\overset{*}{\omega}{}^{(\alpha)}\overset{*}{e}_{(\alpha)}$, причем

$$\overset{*}{\omega}{}^{(0)}=dt, \qquad \overset{*}{\omega}{}^{(i)}=v^{(i)}\,dt+\overset{*}{\gamma}{}^{(i)}_{s}\,dx^s. \tag{2.1}$$

(Видим, что в силу (2.1) и (1.10) из (1.8) и (1.11) получается

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{(i)}_{(0)(0)}=0. \tag{2.2}$$

Теперь из (1.13) следует, что для свободной частицы, покоящейся в данный момент относительно репера $\{x, \overset{*}{e}_{(\alpha)}\}$, имеет место как $u^{(i)}=U^{(i)}=0$, так и $\frac{du^{(i)}}{d\tau}=0$, т. е. в данном случае локальный репер является действительно свободно падающим.) Согласно терминологии Х. Кереса, временную голономную координату t, совпадающую с собственным временем свободно падающего репера $\{x, \overset{*}{e}_{(\alpha)}\}$, будем называть ньютоновой.

В силу (1.5) и (2.1) м-форма (1.4) для V_4 приобретает в голономной координатной системе $\{t, x^s\}$ вид

$$ds^2=-(c\mu\,dt)^2+2v_s\,dx^s\,dt+\gamma_{ps}\,dx^p\,dx^s, \tag{2.3}$$

где

$$\mu\equiv\left(1-\frac{v_s v^s}{c^2}\right)^{1/2}, \qquad v_s=\overset{*}{\gamma}{}^{(i)}_{s}v_{(i)}, \qquad v^p=\gamma^{ps}v_s, \tag{2.4}$$

а 3-пространство $\overset{*}{V}_3$ определяется метрическим тензором

$$\gamma_{ps}=\gamma_p^{(i)}\gamma_s^{(i)},\quad \gamma^{sp}=\gamma_{(i)}^s\gamma_{(i)}^p,\quad \gamma_{(i)}^p\gamma_p^{(k)}=\delta_{(i)}^{(k)}. \tag{2.5}$$

Если материальные точки фиксируют точки 3-пространства $\overset{\bullet}{V}_3$ ($x^s = \mathrm{const}$), то они составляют некоторое тело отсчета, причем, как видно из (2.1), эти материальные точки движутся произвольным образом относительно свободно падающего репера, имея мгновенную скорость $v^{(i)}$. В этом общем случае голономная координатная система $\{t, x^s\}$ описывает некоторую голономную систему отсчета, состоящую из вышеупомянутого тела отсчета и ньютонова времени t [1–2]. Если $v^{(i)} = 0$, то и пространство $\overset{\bullet}{V}_3$ уже фиксируется свободно падающими частицами. Теперь голономные координатные системы $\{t, \xi^s \equiv x^s{}_{|v^{(i)}=0}\}$ образуют множество полугеодезических систем и описывают голономные системы отсчета, называемые обобщенными инерциальными системами [3].

В принципе в любом римановом многообразии V_4 можно ввести множество координатных систем $\{t, x^s\}$ с ньютоновым временем [3]. Если дана некоторая произвольная координатная система $\{x^0, x^s\}$, где вычислены $g^{\mu\nu}$, то для конкретного перехода в некоторую систему $\{t, x^s\}$ нужно найти определенное частное решение

$$t=t(x^0, x^s) \tag{2.6}$$

уравнения

$$-\frac{1}{c^2}=(t_{,0})^2g^{00}+2t_{,0}t_{,s}g^{0s}+t_{,s}t_{,p}g^{sp}. \tag{2.7}$$

Таким образом, в принципе всегда можно проанализировать свойства Г-поля и с точки зрения свободно падающих реперов, причем исходными являются базисные 1-формы $\overset{\bullet}{\omega}{}^{(\alpha)}$, в общем виде данные формулами (2.1). Отсюда, пользуясь соотношениями (1.5)—(1.11), можно вычислить также соответствующие выражения для инвариантов $\overset{\bullet}{\omega}_{(\alpha)(\beta)}$ и $\overset{\bullet}{\Omega}_{(\alpha)(\beta)}$, а тем самым и для $\overset{\bullet}{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ и $\overset{\bullet}{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\lambda)}$ [6].

Следует иметь в виду, что совокупность инвариантов $\{\overset{\bullet}{\Omega}\} \equiv \{\overset{\bullet}{\omega}{}^{(\alpha)}, \overset{\bullet}{\omega}_{(\alpha)(\beta)}, \overset{\bullet}{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}, \overset{\bullet}{\Omega}_{(\alpha)(\beta)}, \overset{\bullet}{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\lambda)}\}$ характеризует Г-поле именно в свободно падающих реперах при определенном ньютоновом времени. Поскольку при этом имеет место $\underset{\nu}{z}{}^{(0)}=\delta^0_\nu$, то по существу формами $\overset{\bullet}{\omega}{}^{(\alpha)}$ Г-поле задается в *кинеметрической калибровке* тетрадных потенциалов (ср. [4]). Из всевозможных преобразований голономных координат выделяются общие преобразования пространственных координат при выбранном ньютоновом времени, т. е. преобразования типа

$$t'=t,\quad x^{s'}=x^{s'}(x^p, t), \tag{2.8}$$

которые сохраняют упомянутую калибровку. Подчеркнем, что различение временных и пространственных величин в совокупности $\{\overset{\bullet}{\Omega}\}$ не зависит от выбора голономных координатных систем, связанных между собой преобразованиями типа (2.8), и в этом свойстве заключается соответствие этих инвариантов т. н. кинеметрическим инвариантам [4, 7].

3. Гравитационное поле в реперах, связанных с произвольным телом отсчета. Хронометрическая калибровка тетрадных потенциалов

Будем рассматривать локальные неголономные реперы Минковского $\{x, \check{e}_{(\alpha)}\}$, связанные с пространственными точками некоторого тела отсчета. Пусть сначала имеем произвольное координатное время x^0. Тогда базисные 1-формы $\omega^{(\alpha)}$ принимают вид

$$\check{\omega}^{(0)} = h^{(0)}_{0}\,\mathrm{d}x^0 + h^{(0)}_{s}\,\mathrm{d}x^s, \qquad \check{\omega}^{(i)} = h^{(i)}_{s}\,\mathrm{d}x^s. \tag{3.1}$$

Видим, что имеет место $z^{(i)}_{0} \equiv h^{(i)}_{0} = 0$. Таким путем получается вариант неполных калибровок т-потенциалов, называемый *хронометрической калибровкой* [4]. Теперь из всевозможных преобразований голономных координат выделяются общее хронометрическое преобразование

$$x^{0'} = x^{0'}(x^0, x^k), \qquad x^{k'} = x^k, \tag{3.2}$$

и сугубо пространственные преобразования

$$x^{0''} = x^{0'}, \qquad x^{s''} = x^{s''}(x^{k'}). \tag{3.3}$$

Видим, что (3.2) и (3.3) сохраняют хронометрическую калибровку т-потенциалов.

Принимая в качестве исходных величин базисные 1-формы $\check{\omega}^{(\alpha)}$ (3.1) и пользуясь соотношениями (1.5)—(1.11), можно получить новую совокупность инвариантов $\{\check{\Omega}\} \equiv \{\check{\omega}^{(\alpha)}, \check{\omega}_{(\alpha)(\beta)}, \check{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}, \check{\Omega}_{(\alpha)(\beta)}, \check{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\lambda)}\}$. Поскольку в принципе всегда можно выбрать т-потенциалы в хронометрической калибровке, то всегда можно и охарактеризовать конкретное Г-поле посредством определенной совокупности этих инвариантов. Но следует иметь в виду, что теперь упомянутые инварианты характеризуют Г-поле именно в определенных локальных реперах $\{x, \check{e}_{(\alpha)}\}$, т. е. они характеризуют также конкретный выбор голономного тела отсчета. В то же время различение временных и пространственных величин в совокупности $\{\check{\Omega}\}$ не зависит от выбора голономных координатных систем, связанных между собой преобразованиями типа (3.2) и (3.3), и в этом свойстве заключается соответствие этих инвариантов т. н. хронометрическим инвариантам [4, 8].

В случае базисных 1-форм $\check{\omega}^{(\alpha)}$ (3.1) 1-формы связности $\check{\omega}_{(\alpha)(\beta)}$ получаются в виде

$$\check{\omega}_{(0)(i)} = \check{\Gamma}_{(0)(i)(0)}\check{\omega}^{(0)} + \check{\Gamma}_{(0)(i)(j)}\check{\omega}^{(j)} = F_{(i)}\check{\omega}^{(0)} + (A_{(i)(j)} - D_{(i)(j)})\,\check{\omega}^{(j)}, \tag{3.4а}$$

$$\begin{aligned}\check{\omega}_{(i)(j)} &= \check{\Gamma}_{(i)(j)(0)}\check{\omega}^{(0)} + \check{\Gamma}_{(i)(j)(k)}\check{\omega}^{(k)} = \\ &= -(A_{(i)(j)} + E_{(i)(j)})\,\check{\omega}^{(0)} + (B_{(i)(j)(k)} + \check{\gamma}_{(i)(j)(k)})\,\check{\omega}^{(k)},\end{aligned} \tag{3.4б}$$

где

$$F_{(i)} = h^{s}_{(i)} F_{s} = h^{s}_{(i)}\left(2c^2 [h^{(0)}_{0}]^{-1} h^{0}_{[s,0]}\right), \tag{3.5}$$

$$A_{(i)(j)} = h^{s}_{(i)} h^{p}_{(j)} A_{sp} = h^{s}_{(i)} h^{p}_{(j)} \left(c^2 h^{(0)}_{[s,p]} + h^{(0)}_{[s} F_{p]}\right), \tag{3.6}$$

$$D_{(i)(j)} = [h^{(0)}_{0}]^{-1} h^{s}_{((j)} h_{(i))s,0} = h^{s}_{(i)} h^{p}_{(j)} D_{sp} = h^{s}_{(i)} h^{p}_{(j)} \left(\frac{1}{2} [h^{(0)}_{0}]^{-1} h_{sp,0}\right), \tag{3.7}$$

$$E_{(i)(j)} = [h_0^{(0)}]^{-1} h^s_{[(j)} h_{(i)]s,0}, \tag{3.8}$$

$$B_{(i)(j)(k)} = 2h^{(0)}_s h^s_{[(i)} D_{(j)]k} + h^{(0)}_s h^s_{(k)} E_{(i)(j)}, \tag{3.9}$$

а $\check{\gamma}_{(i)(j)(k)}$ — коэффициенты связности для 3-пространства $\check{V}_3$ с метрическим тензором

$$h_{sp} = h^{(i)}_s h^{(i)}_p, \quad h^{sp} = h^s_{(i)} h^p_{(i)}, \quad h^p_{(i)} h^{(k)}_p = \delta^{(k)}_{(i)}. \tag{3.10}$$

Можно также убедиться в том, что в силу (1.5)—(1.9) 2-формы кривизны $\check{\Omega}_{(\alpha)(\beta)}$ выражаются через компоненты тензора кривизны $\check{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\lambda)}$, которые можно задать через величины (3.5)—(3.9) и компоненты тензора кривизны $\check{P}_{(i)(j)(k)(l)}$ для $\check{V}_3$.

Отметим, что использование величин, соответствующих по существу т-потенциалам, коэффициентам связности и т. д. в хронометрической калибровке, позволило обсудить многие принципиальные вопросы общей теории относительности и рассмотреть ряд специальных задач. Например, F_s, A_{sp} и D_{sp} в (3.5)—(3.7) — это хорошо известные величины как в формализме хронометрических инвариантов [8], так и в общей теории временноподобных конгруэнций [9]. Величины $F_{(i)}$ и $A_{(i)(j)}$ являются в сущности неголономными составляющими соответственно 3-вектора ускорения и 3-тензора вращений временноподобной конгруэнции, определяющей данное тело отсчета. Бесшпуровая часть матрицы $D_{(i)(j)}$ представляет собой тензор сдвига, а шпур $D_{(s)(s)}$ — расширение этой конгруэнции.

Далее имеем в виду, что преобразование (2.6) для введения ньютонова времени t является частным случаем (3.2). Таким образом, при любом конкретном Г-поле, данном т-потенциалами в хронометрической калибровке, введение ньютонова времени t не изменяет пространственно-временного смысла совокупности инвариантов $\{\check{\Omega}\}$. Следовательно, этим величинам можно уже в общем случае придавать физический смысл с точки зрения систем отсчета с ньютоновым временем. Благодаря именно этому обстоятельству величины, совпадающие на самом деле с F_s и A_{sp} в (3.5) и (3.6), уже толковались как динамические характеристики данной системы отсчета относительно множества обобщенных инерциальных систем [2].

После введения ньютоновой временной координаты t базисные 1-формы $\check{\omega}^{(\alpha)}$ (3.1) приобретают такой вид, что имеет место

$$h_0^{(0)} = \mu, \quad h_p^{(0)} = -(c^2\mu)^{-1} v_p, \tag{3.11}$$

а величины μ и v_p имеют такой же смысл, как и в м-форме (2.3). Теперь можно придать одинаковый смысл голономным координатам $\{t, x^s\}$, встречающимся как в 1-формах $\check{\omega}^{(\alpha)}$ (3.1), так и в 1-формах $\overset{*}{\omega}{}^{(\alpha)}$ (2.1). Реперы $\{x, \overset{*}{e}_{(\alpha)}\}$ и $\{x, \check{e}_{(\alpha)}\}$ связаны между собой локальными лоренцевыми преобразованиями, причем $v^{(i)}$ являются локальными компонентами 3-скорости репера $\{x, \check{e}_{(\alpha)}\}$ относительно $\{x, \overset{*}{e}_{(\alpha)}\}$. В силу этих преобразований получается формула

$$h^{(i)}_s = \mathfrak{A}^{(i)}_{(k)} \gamma^{(k)}_s, \tag{3.12}$$

где

$$\mathfrak{A}^{(i)}_{(k)} = \delta^{(i)}_{(k)} + (v_{(j)}v_{(j)})^{-1}v^{(i)}v_{(k)}(\mu^{-1} - 1). \tag{3.13}$$

Метрические тензоры γ_{sp} и h_{sp}, принадлежащие 3-пространствам $\overset{*}{V}_3$ и $\check{V}_3$ соответственно, связаны между собой соотношением

$$h_{sp} = \gamma_{sp} + (c\mu)^{-2}v_s v_p. \tag{3.14}$$

Отметим, что поскольку h_{sp} является 3-мерным тензором относительно преобразований (3.3), то даже в том случае, когда (2.6) сопровождается преобразованиями типа (3.3), этот тензор имеет до введения ньютонова времени такой же геометрический смысл, как и после этого перехода.

В силу (3.11)—(3.13) после введения ньютонова времени базисные 1-формы $\check{\omega}^{(\alpha)}$ (3.1) выражаются через 1-формы $\overset{*}{\omega}^{(\alpha)}$ (2.1) следующим образом:

$$\check{\omega}^{(0)} = \mu^{-1}[\overset{*}{\omega}^{(0)} - c^{-2}v_{(k)}\overset{*}{\omega}^{(k)}], \qquad \check{\omega}^{(i)} = \mathfrak{A}^{(i)}_{(k)}[-v^{(k)}\overset{*}{\omega}^{(0)} + \overset{*}{\omega}^{(k)}]. \tag{3.15}$$

С учетом (3.11) конкретные выражения 1-форм связности $\check{\omega}_{(\alpha)(\beta)}$ и коэффициентов $\check{\Gamma}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ получаются из общих формул (3.4)—(3.9). Соотношения между реперными компонентами $\check{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\lambda)}$ и $\overset{*}{R}_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\lambda)}$ имеют вид:

$$\check{R}_{(i)(k)(l)(m)} = \mathfrak{A}^{(n)}_{(i)}\mathfrak{A}^{(p)}_{(k)}\mathfrak{A}^{(r)}_{(l)}\mathfrak{A}^{(s)}_{(m)}\overset{*}{Q}_{(n)(p)(r)(s)}, \tag{3.16а}$$

$$\check{R}_{(i)(k)(0)(m)} = \mathfrak{A}^{(n)}_{(i)}\mathfrak{A}^{(p)}_{(k)}\mathfrak{A}^{(s)}_{(m)}\{\mu\overset{*}{Q}_{(n)(p)(0)(s)} + \mu^{-1}v^{(r)}\overset{*}{Q}_{(n)(p)(r)(s)}\}, \tag{3.16б}$$

$$\check{R}_{(0)(k)(0)(m)} = \mathfrak{A}^{(p)}_{(k)}\mathfrak{A}^{(s)}_{(m)}\{\mu^2\overset{*}{Q}_{(0)(p)(0)(s)} - 2v^{(n)}\overset{*}{Q}_{(0)((s)(p))(n)} + \mu^{-2}v^{(n)}v^{(r)}\overset{*}{Q}_{(n)(p)(r)(s)}\}, \tag{3.16в}$$

где

$$\overset{*}{Q}_{(0)(k)(0)(m)} \equiv \overset{*}{R}_{(0)(k)(0)(m)}, \tag{3.17а}$$

$$\overset{*}{Q}_{(i)(k)(0)(l)} \equiv \overset{*}{R}_{(i)(k)(0)(l)} + 2c^{-2}v_{[(k)}\overset{*}{R}_{(i)](0)(0)(l)}, \tag{3.17б}$$

$$\overset{*}{Q}_{(i)(k)(l)(m)} \equiv \overset{*}{R}_{(i)(k)(l)(m)} + 2c^{-2}\{v_{[(k)}\overset{*}{R}_{(i)](0)(l)(m)} + v_{[(m)}\overset{*}{R}_{(l)](0)(i)(k)}\} + \tag{3.17в}$$
$$+ 2c^{-4}\{v_{(i)}v_{[(m)}\overset{*}{R}_{(l)](0)(0)(k)} + v_{(k)}v_{[(l)}\overset{*}{R}_{(m)](0)(0)(i)}\}.$$

С учетом (1.5), (1.7) и (3.15) отсюда получаются и соотношения, связывающие $\overset{*}{\Omega}_{(\alpha)(\beta)}$ и $\check{\Omega}_{(\alpha)(\beta)}$.

4. Заключение

Итак, применяя тетрадный формализм и аппарат внешних дифференциальных форм для исследования свойств Г-поля в системах отсчета с ньютоновым временем, мы имеем возможность исходить либо из базисных 1-форм $\overset{*}{\omega}^{(\alpha)}$, либо из 1-форм $\check{\omega}^{(\alpha)}$. В первом случае, с помощью величин $\{\overset{*}{\Omega}\}$, мы характеризуем Г-поле в свободно падающих реперах Минковского $\{x, \overset{*}{e}_{(\alpha)}\}$ при определенном выборе ньютонова времени t, а во втором случае, с помощью $\{\check{\Omega}\}$, — в локальных реперах $\{x, \check{e}_{(\alpha)}\}$, покоящихся относительно определенного голономного тела отсчета, причем величины $\{\check{\Omega}\}$ не зависят от конкретного выбора временной координаты.

Из вышеизложенного также следует, что возможности практического вычисления совокупностей $\{\overset{*}{\Omega}\}$ и $\{\check{\Omega}\}$ сильно отличаются друг от друга: для вычисления $\{\overset{*}{\Omega}\}$ обязательно нужно ввести ньютоново время t в явном виде, в то время как общий вид $\{\check{\Omega}\}$ можно получить уже до введения времени t, т. е. без интегрирования уравнения типа (2.7). Пользуясь именно последним обстоятельством, мы можем получить отсюда и конкретный практический метод анализа релятивистских Г-полей с точки зрения их нерелятивистских пределов [10].

Автор выражает благодарность Х. Кересу за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керес Х. П., Тр. ИФА АН ЭССР, № 20, 92 (1963).
2. Керес Х. П., Тр. ИФА АН ЭССР, № 25, 3 (1964).
3. Керес Х. П., Тр. ИФА АН ЭССР, № 5, 12 (1957).
4. Иваницкая О. С., Митянок В. В., Классы калибровок Ламе и локальных преобразований Лоренца для гравитационных потенциалов, Ротапринт ИФ АН БССР, Минск, 1974.
5. Иваницкая О. С., Тезисы докл. Всесоюз. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации», Минск, 1976, с. 23.
6. Коппель А., Нерелятивистские гравитационные поля в общей теории относительности, Ротапринт ТГУ, Тарту, 1977.
7. Зельманов А. Л., Докл. АН СССР, **209**, 822 (1973).
8. Зельманов А. Л., Докл. АН СССР, **107**, 815 (1956).
9. Синг Дж., Общая теория относительности, М., 1963, с. 151.
10. Коппель А., Нерелятивистский анализ релятивистских гравитационных полей, Ротапринт ТГУ, Тарту, 1977.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 6/I 1977

A. KOPPEL

TETRAADPOTENTSIAALIDE KALIBREERINGUTEST (NJUUTONLIKU AJAGA TAUSTSÜSTEEMID)

Artiklis on lähtutud üldistest seostest (1.1)—(1.13), mis kirjeldavad relativistlikku gravitatsioonivälja Cartani välisdiferentsiaalvormide keeles. Valemid (1.5) ja (2.1) esitavad gravitatsioonivälja lokaalsetes vabalt langevates Minkovski ortoreeperites ning valemid (1.5) ja (3.1) meelevaldse taustkeha ruumipunktidega seotud ortoreeperites. Esimesel juhul on holonoomne ajakoordinaat t valitud võrdne vabalt langeva reeperi omaajaga (nn. njuutonlik aeg Kerese järgi [1–3]). Teisel juhul on ajakoordinaat x^0 üldiselt meelevaldne, kusjuures üleminek holonoomsele njuutonlikule ajale t teisendusega (2.6) ei muuda tetraadpotentsiaalide kalibreeringut. Baasi 1-vormides (2.1) on tetraadpotentsiaalid antud nn. kinemeetrilises kalibreeringus, 1-vormides (3.1) nn. kronomeetrilises kalibreeringus (vrd. [4–5]). Valemite (1.5)—(1.11) põhjal arvutatud seostuse 1-vormid ja kõveruse 2-vormid koosnevad suurustest, mis vastavad esimesel juhul nn. kinemeetrilis-

tele ja teisel juhul nn. kronomeetrilistele invariantidele (vrd. [7–8]). On võrreldud võimalusi relativistlike gravitatsiooniväljade analüüsimiseks njuutonliku ajaga taustsüsteemides, kasutades ülalnimetatud tüüpi reepereid. Asjaolu, et kronomeetrilises kalibreeringus toimuvate arvutuste puhul pole vaja eelnevalt üle minna njuutonlikule ajale, hõlbustab mainitud analüüsi, sealhulgas relativistlike gravitatsiooniväljade nn. mitterelativistlikku analüüsi [10].

A. KOPPEL

ON THE GAUGE OF TETRAD POTENTIALS (REFERENCE SYSTEMS WITH NEWTONIAN TIME)

As a starting point, general relations (1.1)—(1.13) describing the relativistic gravitational field in the language of Cartan's exterior differential forms are used. Formulae (1.5) and (2.1) represent the field in freely falling Minkowski's orthogonal local frames, and (1.5) and (3.1) in orthogonal local frames connected with space points of an arbitrary reference body, respectively. In the first case, the holonomic time coordinate t is chosen equal to the proper time of freely falling local frames (called the Newtonian time by Keres [1–3]). In the second case, the time coordinate x^0 is arbitrary in general and the tetrad potentials are gauge-invariant under transformation (2.6) which can be used to introduce the Newtonian time. The tetrad potentials entering into the basic 1-forms (2.1) are actually given in the «kinemetric gauge», and the tetrad potentials of 1-forms (3.1) in the «chronometric gauge» (cf. [4–5]). The connection 1-forms and curvature 2-forms evaluated from (1.5)—(1.11) consist of the quantities corresponding to «kinemetric invariants» in the first case, and to «chronometric invariants» in the second case (cf. [7–8]). The possibilities are discussed of analyzing relativistic gravitational fields in the refeтence systems with the Newtonian time, making use of either of the above-mentioned two types of local frames. As for calculations in the «chronometric gauge», there is no need to introduce previously the Newtonian time, and so the analysis of relativistic gravitational fields, the so-called non-relativistic analysis [10] included, may be facilitated.