EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

УДК 519.21

Галина ПРИСТАВКО

ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Galina PRISTAVKO. JUHUSLIKE PROTSESSIDE OPTIMAALNE PEATAMINE

Galina PRISTAVKO. ON OPTIMAL STOPPING FOR STOCHASTIC PROCESSES

Введение и постановка задачи. Рассмотрим на фиксированном вероятностном пространстве (Ω, F, P) непрерывный справа сепарабельный случайный процесс $X=(x_t, t\geqslant 0)$ со значениями в фазовом пространстве (E, B), где E — полукомпакт, B — борелевская σ-алгебра, $F=\{F_t\}$ — неубывающее непрерывное справа семейство σ-алгебр, такой, что x_t F_t-измеримы и $Mx_t^- < \infty$, где $x^- = \max(0, -x)$.

Обозначим через $\bar{C}_t$ класс марковских моментов (м. м.) τ таких, что $\tau \geqslant t$ и $Mx_\tau^- < \infty$; C_t — класс конечных м. м. из $\bar{C}_t$ (марковских моментов остановки (м. м. о.)); $L_t(\bar{L}_t)$ — класс м. м. τ из $C_t(\bar{C}_t)$, для которых $P\{\tau > t\}=1$.

Назовем «t-ценой» функцию $V_t = \sup\limits_{\tau\in C_t} Mx_\tau$ ($W_t=\sup\limits_{\tau\in L_t} Mx_\tau$). Известно [1], что при сформулированных выше условиях существует обобщенный супермартингал (c_t, F_t) ($Mc_t^- < \infty$ и $M(c_s|F_t)\leqslant c_t$ при $s\leqslant t$) такой, что $V_t = Mc_t$, где $c_t = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\tau\in C_t} M(x_\tau | F_t)$.

Обозначим $l_t = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\tau\in L_t} M(x_\tau|F_t)$, тогда $W_t = Ml_t$.

Будем говорить, что

1) момент $\tau_0(t)$ является $(0,t)$-оптимальным в классе $C_t(L_t)$, если P — почти наверное (п. н.)

$$M(x_{\tau_0(t)} | F_t) = c_t \quad (M(x_{\tau_0(t)} | F_t) = l_t);$$

2) момент $\tau_\varepsilon(t)$ является (ε, t)-оптимальным в классе $C_t(L_t)$, если п. н.

$$M(x_{\tau_\varepsilon(t)} | F_t) \geqslant c_t - \varepsilon \quad (M(x_{\tau_\varepsilon(t)} | F_t) \geqslant l_t - \varepsilon);$$

3) момент $\sigma_{\varepsilon_t}(t)$ является (ε_t, t)-оптимальным в классе $C_t(L_t)$, где ε_t некоторый случайный процесс, если п. н.

$$M(x_{\sigma_{\varepsilon_t}(t)} | F_t) \geqslant c_t - \varepsilon_t \, (M(x_{\sigma_{\varepsilon_t}(t)} | F_t) \geqslant l_t - \varepsilon_t)$$

(в наиболее интересных случаях $\varepsilon_t \equiv \varepsilon$, $\varepsilon_t = \varepsilon\cdot c_t$ $(\varepsilon_t = \varepsilon\cdot l_t)$, $\varepsilon_t = \varepsilon\cdot[c_t - M(x_\infty | F_t)]$ $(\varepsilon_t = \varepsilon\cdot[l_t - M(x_\infty|F_t)])$, где $x_\infty = \overline{\lim\limits_t}\, x_t$, $\varepsilon > 0$).

В том случае, когда процесс $X=(x_t, t\geqslant 0)$ удовлетворяет условию $A^-: M(\sup\limits_t x_t^-) < \infty$, процесс $c=(c_t, t\geqslant 0)$ является (см. [1]) наименьшим непрерывным справа C_t-регулярным супермартингалом (т. е. для любых $\sigma,\tau \in C_t$ с $P\{\sigma \leqslant \tau\} = 1$ выполняется $Mc_\tau \leqslant Mc_\sigma$), мажорирующим $X = (x_t, t \geqslant 0)$, а при дополнительном условии $A^{+}: M(\sup_t x_t^{+}) < \infty$ моменты $\tau_\varepsilon(t) = \inf\{s \geqslant t : c_s \leqslant x_s + \varepsilon\}$ являются (ε, t)-оптимальными в классе C_t и моменты $\tau_0(t) = \inf\{s \geqslant t : c_s = x_s\}$ являются $(0, t)$-оптимальными в классе C_t, если процесс $X = (x_t, t \geqslant 0)$ непрерывен с вероятностью 1.

В настоящей работе получен в определенном смысле окончательный результат, а именно дана (регулярная) характеризация цены в общем случае, а также показано существование (ε, t)-оптимальных (при условии A^{+}) и (ε_t, t)-оптимальных моментов в общем случае для специальным образом подобранных процессов ε_t.

В частном случае марковских процессов аналогичные вопросы рассматривались в [2].

Случай A^{+}. Теорема 1. *Пусть случайный процесс $X = (x_t, t \geqslant 0)$ удовлетворяет условию A^{+}. Тогда*
1) *процесс $l = (l_t, t \geqslant 0)$ является наименьшим непрерывным справа $\bar{L}_t$-регулярным супермартингалом (т. е. для любых $\sigma,\tau \in \bar{L}_t$ с $P\{\sigma \leqslant \tau\} = 1$ выполняется $Ml_\tau \leqslant Ml_\sigma$), мажорирующим процесс $X = (x_t, t \geqslant 0)$;*
2) *$l_t = \bar{l}_t$, где $\bar{l}_t = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \bar{L}_t} M(x_\tau \mid F_t)$.*

Доказательство проводится с помощью «урезанных» снизу процессов $l_t^{a} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in L_t} M(x_\tau^{a} \mid F_t)$, где $x_t^{a} = \max(a, x_t)$, $a \leqslant 0$, с последующим предельным переходом $a \to -\infty$. При этом устанавливается, что предельный процесс $l_t^{*} = \lim_{a \to -\infty} l_t^{a}$ является непрерывным справа и совпадает п. н. с l_t.

Теорема 2. *Пусть случайный процесс $X = (x_t, t \geqslant 0)$ удовлетворяет условию A^{+}. Тогда*
1) *моменты $\tau_\varepsilon(t) = \inf\{s \geqslant t : l_s \leqslant x_s + \varepsilon\}$ являются при $\varepsilon > 0$ (ε, t)-оптимальными м. м. в классе L_t;*
2) *моменты $\tau_0(t) = \inf\{s \geqslant t : l_s = x_s\}$ являются $(0, t)$-оптимальными м. м. в классе $\bar{L}_t$, если процесс $X = (x_t, t \geqslant 0)$ непрерывен с вероятностью 1;*
3) *если существует $(0, t)$-оптимальный м. м. $\tau^*(t) \in L_t(\bar{L}_t)$, то момент $\tau_0(t)$ является также $(0, t)$-оптимальным в классе $L_t(\bar{L}_t)$ и $P\{\tau_0(t) \leqslant \tau^*(t)\} = 1$.*

Общий случай. Теорема 3. *Пусть $X = (x_t, t \geqslant 0)$ — случайный процесс. Тогда*
1) *процесс $l = (l_t, t \geqslant 0)$ является наименьшим непрерывным справа L_t-регулярным супермартингалом (т. е. для любых $\sigma,\tau \in L_t$ с $P\{\sigma \leqslant \tau\} = 1$ выполняется $Ml_\tau \leqslant Ml_\sigma$), мажорирующим процесс $X = (x_t, t \geqslant 0)$.*
2) *$l_t = \bar{l}_t$.*

Доказательство проводится с помощью «урезанных» сверху процессов $l_t^{b} = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in L_t} M(x_\tau^{b} \mid F_t)$, где $x_t^{b} = \min(b, x_t)$, $b \geqslant 0$, с последующим предельным переходом $b \to \infty$.

Обобщением теоремы 3 является следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $X = (x_t, t \geqslant 0)$ — случайный процесс. Обозначим*

$$\hat{l}_\tau = \begin{cases} l_t(\omega), & \omega \in \{\omega : \tau = t\}; \\ \overline{\lim\limits_t}\, x_t, & \omega \in \{\omega : \tau \neq t\}. \end{cases}$$

Тогда для любых м. м. $\tau, \sigma \in \bar{L}_t$ *с* $P\{\sigma \leqslant \tau\} = 1$ *выполняется* $M\hat{l}_\tau \leqslant M\hat{l}_\sigma$ *(т. е.* $\hat{l}_t$ *является* $\bar{L}_t$*-регулярным).*

Теорема 5. *Пусть* $X = (x_t,\ t \geqslant 0)$ — *случайный процесс и* $l_t = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\tau \in L_t} M(x_\tau | F_t)$ *конечно. Тогда если существует* $(0, t)$*-оптимальный м. м.* $\tau^*(t) \in L_t(\bar{L}_t)$, *то момент* $\tau_0(t)$ *является также* $(0, t)$*-оптимальным в классе* $L_t(\bar{L}_t)$ *и* $P\{\tau_0(t) \leqslant \tau^*(t)\} = 1$.

Теорема 6. *Пусть случайный процесс* $X = (x_t,\ t \geqslant 0)$ *удовлетворяет условию* $a^- : M(\overline{\lim\limits_t}\, x_t^-) < \infty$, $\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon \cdot \tilde{l}_t$, *где* $\tilde{l}_t = l_t - M(\overline{\lim\limits_s}\, x_s | F_t)$, $\varepsilon > 0$, $t \in T_0 = \{t : l_t < \infty\}$. *Тогда моменты* $\sigma_{\tilde{\varepsilon}_t}(t) = \inf\{s \geqslant t : l_s \leqslant x_s + \tilde{\varepsilon}_s\}$ *являются* $(\tilde{\varepsilon}_t, t)$*-оптимальными м. м. в классе* $\bar{L}_t$ *для* $t \in T_0$.

Доказательство основывается на следующей теореме.

Теорема 7. *Пусть* $X = (x_t,\ t \geqslant 0)$ — *случайный процесс,* $\varepsilon_t = \varepsilon \cdot l_t$, $\varepsilon > 0$, $t \in T_0$, $P\{\overline{\lim\limits_t}\, x_t \geqslant 0\} = 1$. *Тогда моменты* $\sigma_{\varepsilon_t}(t) = \inf\{s \geqslant t : l_s \leqslant x_s + \varepsilon_s\}$ *являются* (ε_t, t)*-оптимальными в классе* $\bar{L}_t$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму, представляющую и самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть* $X = (x_t,\ t \geqslant 0)$ — *случайный процесс и* $P\{\overline{\lim\limits_t}\, x_t \geqslant 0\} = 1$. *Тогда* $l_t = M(I_{\{\sigma_{\varepsilon_t}(t) < \infty\}}\, l_{\sigma_{\varepsilon_t}(t)} | F_t) + M(I_{\{\sigma_{\varepsilon_t}(t) = \infty\}}\, \overline{\lim\limits_s}\, x_s | F_t)$,

где $I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Фокеев А. Г., Теория вероятности и ее применения, **XV**, № 2 (1970).
2. Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1976.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15/VII 1976