где

$$K = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| f^{(n+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^{n} l_k^{(n+1)}(\xi) M_k(f) \right|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Omladič, M., Pahor, S., Suhadolc, A., Numer. Math., 25, 421 (1976).
2. Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 9/XI 1976

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.2.15

УДК 512.3

А. КРЮЧКОВ

О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ ПОЛЕЙ

A. KRYUCHKOV. ON THE FIELD EMBEDDING PROBLEM

A. KRJUTŠKOV. KORPUSTE SISESTAMISE ÜLESANDEST

Пусть дана произвольная задача погружения полей:

$$1 \to A \to G_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_1 \to 1, \tag{1}$$

где $F_1 = \mathrm{Gal}\,(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0)$ — группа Галуа поля $\mathfrak{k}$ над $\mathfrak{k}_0$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ алгебраическое замыкание $\mathfrak{k}_0$ и положим $F_2 = \mathrm{Gal}\,(\mathfrak{K}/\mathfrak{k}_0)$. Рассмотрим следующую диаграмму из работы [1]:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & A & \to & G_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_2 & \to & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & A & \to & G_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & F_1 & \to & 1. \end{array} \qquad \begin{array}{r} (2) \\ \\ (1) \end{array}$$

Здесь G_2 — произведение групп G_1 и F_2 с объединенной фактор-группой F_1, а гомоморфизм φ_2 определяется гомоморфизмом φ_1 обычным образом. Задачи погружения (1) и (2) разрешимы или нет одновременно, а задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда последовательность (2) расщепляется, т. е. когда расширение (2) полупрямое. Необходимым условием разрешимости любой задачи погружения является условие «согласности» Фаддеева—Хассе. Для задачи (2) оно заключается в существовании с точностью до кограницы такого одномерного коцикла l_g, $g \in G_2$, группы G_2 со значениями в $(A\mathfrak{K})^*$-множестве регулярных элементов групповой алгебры $A\mathfrak{K}$, что его ограничение на A есть заданный коцикл, а именно: $l_a = a^{-1}$, $a \in A$.

Пусть теперь для элементов $f \in F_2$ выбраны представители $\bar{f} \in G_2$, $\varphi_2(\bar{f}) = f$, и такие, что $\overline{1}_{F_2} = 1_{G_2}$. Полагаем, что $h(f_1, f_2)$ — соответствующая система факторов. Как показано в [2], расщепляемость последовательности (2) равносильна существованию такой функции $\lambda_f : F_2 \to A$, что

$$h(f_1, f_2) = \lambda_{f_1 f_2} \lambda_{f_2}^{-1} \lambda_{f_1}^{-f_2}, \tag{3}$$

где $\lambda_{f_1}^{-f_2} = (\lambda_{f_1}^{f_2})^{-1} = (\bar{f}_2^{-1} \lambda_{f_1} \bar{f}_2)^{-1} = \bar{f}_2^{-1} \lambda_{f_1}^{-1} \bar{f}_2$.

Рассмотрим функцию $L_g : G_2 \to A$, полагая, по определению, $L_g = a^{-1} \lambda_f$, если $g = \bar{f} a$. Заметим, что тогда $L_{\bar{f}} = \lambda_f$ и $L_a = a^{-1}$ при $a \in A$. Непосредственно проверяется, что L_g — одномерный коцикл. С другой стороны, если такой коцикл существует, тогда имеем

$$L_{\bar{f}_1}^{\bar{f}_2} L_{\bar{f}_2} = L_{\bar{f}_1 \bar{f}_2} = L_{\overline{f_1 f_2} h(f_1, f_2)} = L_{\overline{f_1 f_2}}^{h(f_1, f_2)} h^{-1}(f_1, f_2) = h^{-1}(f_1, f_2) L_{\overline{f_1 f_2}},$$

т. е. $h(f_1, f_2) = L_{\overline{f_1 f_2}} L_{\bar{f}_2}^{-1} L_{\bar{f}_1}^{-\bar{f}_2}$. Значит, нашлась такая функция $\lambda_f = L_{\bar{f}} : F_2 \to A$, что справедливо тождество (3). Следовательно, последовательность (2) расщепляется. Сформулируем полученный результат.

Теорема. *Разрешимость задачи* (2) *эквивалентна существованию такого одномерного коцикла L_g группы G_2 с коэффициентами в A, что $L_a = a^{-1}$ для $a \in A$.*

Замечание. Из определения следует, что если указанный в теореме коцикл L_g существует, то он является системой «согласности» для задачи (2), так как $A \subset (A\mathfrak{K})^*$. Поэтому, если условие «согласности» для задачи (2) выполнено, то дополнительное препятствие для ее разрешимости заключается в нахождении системы «согласности» с коэффициентами в более узком, чем $(A\mathfrak{K})^*$-множестве, а именно в A. Отметим также, что условие «согласности» и разрешимость задачи (2) эквивалентны распадению канонического класса последовательности (2) в $(A\mathfrak{K})^*$ и A соответственно.

Предположим теперь, что A — нормальный делитель в $(A\mathfrak{K})^*$. Тогда имеем следующую точную последовательность G_2-модулей:

$$1 \to A \to (A\mathfrak{K})^* \to R \to 1, \tag{4}$$

где $R = (A\mathfrak{K})^*/A$. Последовательность (4) определяет точную последовательность одномерных когомологий

$$H^1(G_2, A) \to H^1(G_2, (A\mathfrak{K})^*) \xrightarrow{\gamma} H^1(G_2, R). \tag{5}$$

Если условие «согласности» выполнено, то определен элемент x из $H^1(G_2, (A\mathfrak{K})^*)$. Пусть $y = \gamma(x)$. Из последовательности (5) легко видеть, что разрешимость задачи (2), а значит, и задачи (1), эквивалентна, в силу доказанной выше теоремы, равенству нулю элемента y.

Если группа A — абелева, то A — нормальный делитель в $(A\mathfrak{K})^*$. Группа $H^1(F_2, R)$ вкладывается посредством отображения инфляции в группу $H^1(G_2, R)$ и, в чем легко убедиться, элемент y содержится и в $H^1(F_2, R)$. Как показано в [1], в этом случае можно также спустить поле, а именно:

пусть $\hat{R} = \mathrm{Hom}\,(R, \mathfrak{K}^*)$, $\hat{A} = \mathrm{Hom}\,(A, \mathfrak{K}^*)$ и пусть подгруппа C группы F_2 тривиально действует на характеры из $\hat{A}$. Положим $D = F_2/C$ и

$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{K}^C$ — подполю инвариантных относительно C элементов $\mathfrak{K}$. Тогда $H^1(F_2, R) = H^1(F_2, \mathrm{Hom}(\hat{R}, \mathfrak{K}^*)) \approx H^1(D, \mathrm{Hom}(\hat{R}, \mathfrak{k}_1^*))$.

Покажем, что в абелевом случае препятствие для разрешимости задачи (2), найденное выше, совпадает при выполнении условия «согласности» с дополнительным условием погружаемости (д. у. п.) Яковлева [3].

Для этого рассмотрим начало спектральной последовательности Линдона [4].

$$H^1(F_2, A) \to H^1(G_2, A) \to H^1(A, A)^{G_2} \xrightarrow{\rho} H^2(F_2, A). \tag{6}$$

Трансгрессия ϱ в этой размерности является гомоморфизмом, а именно — дифференциалом d^2 бистепени $(2, -1)$, идущим от базы к слою.

Коцикл $l_a = a^{-1}$, $a \in A$, инвариантен под действием G_2, так как $g^{-1} l_{gag^{-1}} g = a^{-1} = l_a$. Покажем, что класс, определяемый коциклом l_a, переводится посредством ϱ в определяемый коциклом $h(f_1, f_2)$ класс расширения (2). Как показано в [4], для этого достаточно найти одномерную коцепь $M_g : G_2 \to A$ такую, у которой ограничение на A совпадало бы с коциклом l_a и $\delta M_g(g_1, g_2) = h^*(g_1, g_2)$, где δ — кограничный гомоморфизм, а $h^*(g_1, g_2) = h(\varphi_2(g_1), \varphi_2(g_2))$. Возьмем в качестве M_g функцию, равную $\underline{a^{-1}}$, если только $g = \bar{f}a$. Тогда $M_a = l_a = a^{-1}$, $a \in A$, так как по условию $\bar{1}_{F_2} = 1_{G_2}$. Пусть теперь $g_1 = \bar{f}_1 a_1$, $g_2 = \bar{f}_2 a_2$, $g_1 g_2 = \overline{f_1 f_2} a_3$. Тогда $h^*(g_1, g_2) = h(f_1, f_2) = \overline{f_1 f_2}^{-1} \bar{f}_1 \bar{f}_2 = a_3 g_2^{-1} g_1^{-1} \bar{f}_1 \bar{f}_2 = a_3 a_2^{-1} \bar{f}_2^{-1} a_1^{-1} \bar{f}_2$.

С другой стороны,

$$\delta M_g(g_1, g_2) = M_{g_2} M_{g_1 g_2}^{-1} M_{g_1}^{g_2} =$$

$$= a_2^{-1} a_3 g_2^{-1} a_1^{-1} g_2 = a_2^{-1} a_3 a_2^{-1} \bar{f}_2^{-1} a_1^{-1} \bar{f}_2 a_2.$$

Группа A у нас абелева, следовательно, получаем $\delta M(g_1, g_2) = h^*(g_1, g_2)$. Значит, $\mathrm{cls\,res}\, M_g = \mathrm{cls}\, l_a$, $\mathrm{cls}\, l_a \xrightarrow{\rho} \mathrm{cls}\, h$. Из последовательности (6) вытекает, что $\mathrm{cls}\, h = 0$ тогда и только тогда, когда существует коцикл $l_g : G_2 \to A$ такой, что $l_a = a^{-1}$. Как показано в [1], равенство $\mathrm{cls}\, h = 0$ при выполнении условия «согласности» эквивалентно д. у. п. Яковлева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башмаков М. И., Матем. заметки, 4, вып. 2, 1968, с. 137.
2. Холл М., Теория групп, М., 1962.
3. Яковлев А. В., Докл. АН СССР, 150, № 5, 1009 (1963).
4. Маклейн С., Гомология, М., 1966.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию 28/V 1976