EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.2.14

УДК 517.512.6

М. ЛЕВИН

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

M. LEVIN. ÜHEST FUNKTSIOONIDE LÄHENDAMISE VALEMIST

M. LEVIN. ON ONE FORMULA OF APPROXIMATION

При построении каждой формулы приближения функции используется некоторая конкретная информация о функции. Например, для интерполяционной формулы такой информацией являются значения функции и ее производных в заданных точках (узлах), для метода наименьших квадратов — моменты функции, для метода, рассмотренного в [1], — средние значения функции на заданных отрезках и т. д. Обобщением этих методов можно считать формулу

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)M_k(f)+r_n(f;x), \tag{1}$$

где $r_n(f;x)$ — остаток формулы, $f(x)$ — функция из некоторого множества F, $l_k(x)$ $(k=0,\ldots,n)$ — линейно независимые функции из F, $M_k(f)$ $(k=0,\ldots,n)$ — линейные функционалы на F.

Будем считать, что функции $l_0(x),\ldots,l_n(x)$ удовлетворяют условию

$$M_k(l_j)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j\end{cases}\qquad (k,\ j=0,\ldots,n).$$

1. Пусть F состоит из функций, непрерывных на некотором множестве E, $\|f\|=\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$, функционалы $M_k(f)$ представимы в виде

$$M_k(f)=\int\limits_E \mu_k(x)f(x)\,dx\qquad (k=0,\ldots,n).$$

Через $P_n^*(x)$ обозначим обобщенный многочлен вида

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k l_k(x),$$

для которого

$$\|f-P_n^*\|=\inf_{\{c_k\}}\|f-P_n\|.$$

Т е о р е м а 1. *Для $x\in E$ справедлива оценка*

$$\|r_n(f;x)\| \leqslant \left(1+\sum_{k=0}^{n} \mu_k \|l_k\|\right) \|f-P^*_n\|, \tag{2}$$

где

$$\mu_k = \int_E |\mu_k(x)|\, dx \quad (k=0, \ldots, n).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P^*_n(x) = \sum_{k=0}^{n} M_k(P^*_n)\, l_k(x).$$

Обозначив

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) M_k(f),$$

имеем

$$\|r_n(f;x)\| = \|(f-P^*_n)+(P^*_n-Q_n)\| \leqslant \|f-P^*_n\| +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} \|l_k\|\, \mu_k \|f-P^*_n\|,$$

откуда следует (2), что и требовалось доказать.

2. Пусть, теперь, множество F состоит из функций $f(x)$, которые $n+1$ раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, 1]$, а функционалы $M_k(f)$ представимы в виде

$$M_k(f) = \int_0^1 \mu_k(x) f(x)\, dx \quad (k=0, \ldots, n).$$

Относительно непрерывных функций $\mu_0(x), \ldots, \mu_n(x)$ будем предполагать следующее: $\mu_0(x) \geqslant 0$ на $[0,1]$, для каждого $l=1, 2, \ldots, n$ функции $\mu_0(x), \mu_1(x), \ldots, \mu_l(x)$ образуют T-систему (систему Чебышева) [2] порядка l на $[0,1]$. Примерами таких систем $\mu_0(x), \ldots$ $\ldots, \mu_n(x)$ являются системы [2]:

$$x^{\alpha_k} \quad (k=0, \ldots, n), \quad 0=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n;$$

$$\frac{1}{x+\alpha_k} \quad (k=0, \ldots, n), \quad 0<\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n;$$

$$e^{\alpha_k x} \quad (k=0, \ldots, n), \quad \alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n.$$

Теорема 2. *Существуют числа* $\xi_0, \ldots, \xi_n \in (0,1)$ *и величина* $\xi=\xi(x) \in (0,1)$ *такие, что для каждого значения* $x \in [0,1]$ *справедлива формула*

$$r_n(f;x) = \frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^{n} l_k^{(n+1)}(\xi) M_k(f)\right] \omega(x), \tag{3}$$

где $\omega(x) = (x-\xi_0)(x-\xi_1)\ \ldots\ (x-\xi_n)$.

Доказательство. Покажем предварительно справедливость такого утверждения: если для непрерывной на $[0,1]$ функции $\varphi(x)$

$$\int_0^1 \mu_k(x) \varphi(x)\, dx = 0 \quad (k=0, \ldots, n), \tag{4}$$

то существуют числа $0 < \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < 1$ такие, что $\varphi(\xi_i) = 0$ $(i = 0, \ldots, n)$.

Действительно, предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (4), имеет на $(0, 1)$ l нулей нечетной кратности, $\xi_1 < \xi_2 < \ldots \ldots < \xi_l$ и $l \leqslant n$. Тогда [2] существует функция

$$P(x) = \sum_{k=0}^{l} \lambda_k \mu_k(x)$$

такая, что $P(\xi_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, а других нулей на $(0, 1)$ у $P(x)$ нет. Отсюда следует, что

$$\int_0^1 P(x) \varphi(x)\, dx \neq 0.$$

С другой стороны, по (4)

$$\int_0^1 P(x) \varphi(x)\, dx = \sum_{k=0}^{l} \lambda_k \int_0^1 \mu_k(x) \varphi(x)\, dx = 0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Взяв теперь $\varphi(x) = r_n(f; x)$, имеем, что существуют числа $0 < \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < 1$ такие, что $r_n(f; \xi_i) = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Обозначив $\omega(x) = (x - \xi_0)(x - \xi_1) \ldots (x - \xi_n)$, рассмотрим функцию

$$L(t) = r_n(f; t) - \lambda \omega(t). \tag{5}$$

Пусть $x \neq \xi_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $x \in [0, 1]$. Выбрав λ так, что $L(x) = 0$, имеем по теореме Ролля, что существует значение $\xi \in (0, 1)$ такое, что $L^{(n+1)}(\xi) = 0$. Отсюда и по (5) находим

$$\lambda = r_n^{(n+1)}(f; \xi) / (n+1)!$$

Подставив это λ в равенство $L(x) = 0$, получим равенство (3), что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. *Если $l_k(x)$ — многочлены степени $\leqslant n$, то*

$$r_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x).$$

З а м е ч а н и е. Пусть $L(f)$ — некоторый линейный оператор на F. Тогда формула (1) может быть использована для построения приближения $L(f)$ по информации $M_k(f)$ $(k = 0, \ldots, n)$:

$$L(f) = \sum_{k=0}^{n} L(l_k) M_k(f) + R_n(f),$$

где $R_n(f) = L(r_n)$.

Если, например,

$$L(f) = \int_0^1 \nu(x) f(x)\, dx,$$

то при выполнении предпосылок теоремы 2

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{K}{(n+1)!} \int_0^1 |\nu(x) \omega(x)|\, dx,$$

где

$$K = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| f^{(n+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^{n} l_k^{(n+1)}(\xi) M_k(f) \right|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Omladič, M., Pahor, S., Suhadolc, A., Numer. Math., 25, 421 (1976).
2. Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973.

Таллинский политехнический институт Поступила в редакцию 9/XI 1976

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

УДК 512.3

А. КРЮЧКОВ

О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ ПОЛЕЙ

A. KRYUCHKOV. ON THE FIELD EMBEDDING PROBLEM

A. KRJUTŠKOV. KORPUSTE SISESTAMISE ÜLESANDEST

Пусть дана произвольная задача погружения полей:

$$1 \to A \to G_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_1 \to 1, \tag{1}$$

где $F_1 = \mathrm{Gal}\,(\mathfrak{k}/\mathfrak{k}_0)$ — группа Галуа поля $\mathfrak{k}$ над $\mathfrak{k}_0$. Обозначим через $\mathfrak{K}$ алгебраическое замыкание $\mathfrak{k}_0$ и положим $F_2 = \mathrm{Gal}\,(\mathfrak{K}/\mathfrak{k}_0)$. Рассмотрим следующую диаграмму из работы [1]:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & A & \to & G_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & F_2 & \to & 1 \qquad (2) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & A & \to & G_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & F_1 & \to & 1. \qquad (1) \end{array}$$

Здесь G_2 — произведение групп G_1 и F_2 с объединенной фактор-группой F_1, а гомоморфизм φ_2 определяется гомоморфизмом φ_1 обычным образом. Задачи погружения (1) и (2) разрешимы или нет одновременно, а задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда последовательность (2) расщепляется, т. е. когда расширение (2) полупрямое. Необходимым условием разрешимости любой задачи погружения является условие «согласности» Фаддеева—Хассе. Для задачи (2) оно заключается в существовании с точностью до кограницы такого одномерного коцикла l_g, $g \in G_2$, группы G_2 со значениями в $(A\mathfrak{K})^*$-множестве регулярных элементов групповой алгебры $A\mathfrak{K}$, что его ограничение на A есть заданный коцикл, а именно: $l_a = a^{-1}$, $a \in A$.

Пусть теперь для элементов $f \in F_2$ выбраны представители $\bar{f} \in G_2$, $\varphi_2(\bar{f}) = f$, и такие, что $\overline{1}_{F_2} = 1_{G_2}$. Полагаем, что $h(f_1, f_2)$ — соответствую-