

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÕIDE  
FÜSIKA \* МАТЕМАТИКА. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26  
ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

УДК 517.512.6

М. ЛЕВИН

## ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

М. LEVIN. ÜHESIT FUNKTSIOONIDE LÄHENDAMISE VALEMIST

М. LEVIN. ON ONE FORMULA OF APPROXIMATION

При построении каждой формулы приближения функции используется некоторая конкретная информация о функции. Например, для интерполяционной формулы такой информацией являются значения функции и ее производных в заданных точках (узлах), для метода наименьших квадратов — моменты функции, для метода, рассмотренного в [1], — средние значения функции на заданных отрезках и т. д.

Обобщением этих методов можно считать формулу

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) M_k(f) + r_n(f; x), \quad (1)$$

где  $r_n(f; x)$  — остаток формулы,  $f(x)$  — функция из некоторого множества  $F$ ,  $l_k(x)$  ( $k=0, \dots, n$ ) — линейно независимые функции из  $F$ ,  $M_k(f)$  ( $k=0, \dots, n$ ) — линейные функционалы на  $F$ .

Будем считать, что функции  $l_0(x), \dots, l_n(x)$  удовлетворяют условию

$$M_k(l_j) = \begin{cases} 1, & k=j; \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (k, j=0, \dots, n).$$

1. Пусть  $F$  состоит из функций, непрерывных на некотором множестве  $E$ ,  $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$ , функционалы  $M_k(f)$  представимы в виде

$$M_k(f) = \int_E \mu_k(x) f(x) dx \quad (k=0, \dots, n).$$

Через  $P_n^*(x)$  обозначим обобщенный многочлен вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k l_k(x),$$

для которого

$$\|f - P_n^*\| = \inf_{\{c_k\}} \|f - P_n\|.$$

Теорема 1. Для  $x \in E$  справедлива оценка

$$\|r_n(f; x)\| \leq (1 + \sum_{k=0}^n \mu_k \|l_k\|) \|f - P_n^*\|, \quad (2)$$

где

$$\mu_k = \int_E |\mu_k(x)| dx \quad (k=0, \dots, n).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$P_n^*(x) = \sum_{k=0}^n M_k(P_n^*) l_k(x).$$

Обозначив

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) M_k(f),$$

имеем

$$\begin{aligned} \|r_n(f; x)\| &= \|(f - P_n^*) + (P_n^* - Q_n)\| \leq \|f - P_n^*\| + \\ &+ \sum_{k=0}^n \|l_k\| \mu_k \|f - P_n^*\|, \end{aligned}$$

откуда следует (2), что и требовалось доказать.

2. Пусть, теперь, множество  $F$  состоит из функций  $f(x)$ , которые  $n+1$  раз непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[0, 1]$ , а функционалы  $M_k(f)$  представимы в виде

$$M_k(f) = \int_0^1 \mu_k(x) f(x) dx \quad (k=0, \dots, n).$$

Относительно непрерывных функций  $\mu_0(x), \dots, \mu_n(x)$  будем предполагать следующее:  $\mu_0(x) \geq 0$  на  $[0, 1]$ , для каждого  $l=1, 2, \dots, n$  функции  $\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_l(x)$  образуют  $T$ -систему (систему Чебышева)  $[2]$  порядка  $l$  на  $[0, 1]$ . Примерами таких систем  $\mu_0(x), \dots, \mu_n(x)$  являются системы  $[2]$ :

$$x^{\alpha_k} \quad (k=0, \dots, n), \quad 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n;$$

$$\frac{1}{x + \alpha_k} \quad (k=0, \dots, n), \quad 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n;$$

$$e^{\alpha_k x} \quad (k=0, \dots, n), \quad \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n.$$

**Теорема 2.** Существуют числа  $\xi_0, \dots, \xi_n \in (0, 1)$  и величина  $\xi = \xi(x) \in (0, 1)$  такие, что для каждого значения  $x \in [0, 1]$  справедлива формула

$$r_n(f; x) = \frac{1}{(n+1)!} [f^{(n+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^n l_k^{(n+1)}(\xi) M_k(f)] \omega(x), \quad (3)$$

где  $\omega(x) = (x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$ .

Доказательство. Покажем предварительно справедливость такого утверждения: если для непрерывной на  $[0, 1]$  функции  $\varphi(x)$

$$\int_0^1 \mu_k(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (k=0, \dots, n), \quad (4)$$

то существуют числа  $0 < \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < 1$  такие, что  $\varphi(\xi_i) = 0$  ( $i = 0, \dots, n$ ).

Действительно, предположим, что функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условию (4), имеет на  $(0, 1)$   $l$  нулей нечетной кратности,  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_l$  и  $l \leq n$ . Тогда [2] существует функция

$$P(x) = \sum_{h=0}^l \lambda_h \mu_h(x)$$

такая, что  $P(\xi_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), а других нулей на  $(0, 1)$  у  $P(x)$  нет. Отсюда следует, что

$$\int_0^1 P(x) \varphi(x) dx \neq 0.$$

С другой стороны, по (4)

$$\int_0^1 P(x) \varphi(x) dx = \sum_{h=0}^l \lambda_h \int_0^1 \mu_h(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Взяв теперь  $\varphi(x) = r_n(f; x)$ , имеем, что существуют числа  $0 < \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < 1$  такие, что  $r_n(f; \xi_i) = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Обозначив  $\omega(x) = (x - \xi_0)(x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$ , рассмотрим функцию

$$L(t) = r_n(f; t) - \lambda \omega(t). \quad (5)$$

Пусть  $x \neq \xi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) и  $x \in [0, 1]$ . Выбрав  $\lambda$  так, что  $L(x) = 0$ , имеем по теореме Ролля, что существует значение  $\xi \in (0, 1)$  такое, что  $L^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Отсюда и по (5) находим

$$\lambda = r_n^{(n+1)}(f; \xi) / (n+1)!$$

Подставив это  $\lambda$  в равенство  $L(x) = 0$ , получим равенство (3), что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Если  $l_k(x)$  — многочлены степени  $\leq n$ , то

$$r_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x).$$

З а м е ч а н и е. Пусть  $L(f)$  — некоторый линейный оператор на  $F$ . Тогда формула (1) может быть использована для построения приближения  $L(f)$  по информации  $M_k(f)$  ( $k = 0, \dots, n$ ):

$$L(f) = \sum_{h=0}^n L(l_h) M_h(f) + R_n(f),$$

где  $R_n(f) = L(r_n)$ .

Если, например,

$$L(f) = \int_0^1 v(x) f(x) dx,$$

то при выполнении предпосылок теоремы 2

$$|R_n(f)| \leq \frac{K}{(n+1)!} \int_0^1 |v(x) \omega(x)| dx,$$

где

$$K = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^n l_k^{(n+1)}(\xi) M_k(f)|.$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Omladič, M., Pahor, S., Suhadolc, A., Numer. Math., **25**, 421 (1976).
2. Крейн М. Г., Нудельман А. А., Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи, М., 1973.

Таллинский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
9/XI 1976

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÕIDE  
FÜSIKA \* MATEMAATIKA. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26  
ФИЗИКА \* МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

А. КРЮЧКОВ

УДК 512.3

### О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ ПОЛЕЙ

A. KRYUCHKOV. ON THE FIELD EMBEDDING PROBLEM.

A. KRJUTSKOV. KORPUSSE SISESTAMISE ÜLESANDEST

Пусть дана произвольная задача погружения полей:

$$1 \rightarrow A \rightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi_1} F_1 \rightarrow 1, \quad (1)$$

где  $F_1 = \text{Gal}(\mathbb{f}/\mathbb{f}_0)$  — группа Галуа поля  $\mathbb{f}$  над  $\mathbb{f}_0$ . Обозначим через  $\mathbb{R}$  алгебраическое замыкание  $\mathbb{f}_0$  и положим  $F_2 = \text{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{f}_0)$ . Рассмотрим следующую диаграмму из работы [1]:

$$1 \rightarrow A \rightarrow G_2 \xrightarrow{\varphi_2} F_2 \rightarrow 1 \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \varphi_2 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & \varphi_1 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ 1 & \rightarrow & A & \rightarrow & G_1 & \rightarrow & F_1 \rightarrow 1. \end{array} \quad (1)$$

Здесь  $G_2$  — произведение групп  $G_1$  и  $F_2$  с объединенной фактор-группой  $F_1$ , а гомоморфизм  $\varphi_2$  определяется гомоморфизмом  $\varphi_1$  обычным образом. Задачи погружения (1) и (2) разрешимы или нет одновременно, а задача (2) разрешима тогда и только тогда, когда последовательность (2) расщепляется, т. е. когда расширение (2) полупрямое. Необходимым условием разрешимости любой задачи погружения является условие «согласности» Фаддеева—Хассе. Для задачи (2) оно заключается в существовании с точностью до кограницы такого одномерного коцикла  $l_g$ ,  $g \in G_2$ , группы  $G_2$  со значениями в  $(A\mathbb{R})^*$ -множестве регулярных элементов групповой алгебры  $A\mathbb{R}$ , что его ограничение на  $A$  есть заданный коцикл, а именно:  $l_a = a^{-1}$ ,  $a \in A$ .

Пусть теперь для элементов  $f \in F_2$  выбраны представители  $\bar{f} \in G_2$ ,  $\varphi_2(\bar{f}) = f$ , и такие, что  $\bar{1}_{F_2} = 1_{G_2}$ . Полагаем, что  $h(f_1, f_2)$  — соответствующий