EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

УДК 62-501.72

И. РАНДВЕЭ

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПОДСИСТЕМ

Рассматривается задача рекурсивного адаптивного оценивания параметров и состояния взаимосвязанных линейных подсистем по двухуровневой схеме методом Магилла [1].

1. Постановка задачи

Пусть в полностью управляемой и наблюдаемой системе

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k)+u(k), \\ y(k) &= H(k)x(k)+v(k) \\ & \qquad k=1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

выделены только две (ради простоты записи) подсистемы так, что

$$\underset{n\times n}{A} = \left(\begin{array}{c:c} A_1(\alpha_1) & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_2(\alpha_2) \end{array}\right), \quad \underset{p\times n}{H} = \left(\begin{array}{c:c} H_1 & 0 \\ \hdashline 0 & H_2 \end{array}\right), \quad \underset{n\times 1}{x(k)} = \left|\begin{array}{c} x_1(k) \\ \hdashline x_2(k) \end{array}\right|, \quad \underset{p\times 1}{y(k)} = \left|\begin{array}{c} y_1(k) \\ \hdashline y_2(k) \end{array}\right|.$$

Здесь $x(k)$, $y(k)$ — векторы состояния и измерений; α_1, α_2 — неизвестные параметры, заданные конечным числом возможных значений и априорными вероятностями появления этих значений; $u(k)$, $v(k)$ — векторы белого гауссова шума с нулевым математическим ожиданием и положительно определенными ковариационными матрицами:

$$E[v(k)v'(k)] = \Delta_{k,l}R(k), \qquad E[u(k)u'(k)] = \Delta_{k,l}Q(k), \qquad \Delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k=l; \\ 0, & k\neq l. \end{cases}$$

Кроме того, $E[v(k)u'(l)] = 0$ при всех целых k и l.

Задача состоит в определении оценок состояния $\bar{x}_1(k)$ и $\bar{x}_2(k)$ подсистем по последовательностям измерений $Y_{1k} = \{y_1(1), \ldots, y_1(k)\}$ и $Y_{2k} = \{y_2(1), \ldots, y_2(k)\}$, которые минимизируют условное математическое ожидание функции

$$J(k) = E\{\varepsilon'(k)W\varepsilon(k)\} \qquad k=1,2,\ldots, \tag{2}$$

где $\varepsilon(k) = x(k) - \bar{x}(k)$, W — симметричная положительно определенная матрица.

Предполагается, что параметры, в данном случае α_1 и α_2, приняли одно из неизвестных дискретных значений и в течение процесса наблюдения не изменяются.

Оценка векторов $x_1(k)$ и $x_2(k)$ при данных условиях может быть получена с помощью пакета фильтров Калмана [1]:

$$\bar{x}(k)=\sum_{m=1}^{N}\bar{x}(k\mid Y_k;\ \alpha_m)\,p(\alpha_m\mid Y_k), \tag{3}$$

где N — число возможных комбинаций значений параметров, $\bar{x}(k|Y_k;\ \alpha_m)$ — оценка состояния фильтра Калмана по измерениям Y_k и по одной из комбинаций значений параметров, $p(\alpha_m|Y_k)$ — условная вероятность появления значения α_m.

Необходимое число фильтров в структуре матрицы типа A может быть существенно уменьшено, если воспользоваться схемой децентрализованного оценивания [2,3]. Пусть, например, α_1 и α_2 могут принимать M значений и $n_1=n_2=0{,}5n$. По методу [1] требуется пакет из M^2 фильтров размерности n. При децентрализованной схеме решения достаточно иметь два взаимосвязанных пакета из M фильтров размерности n_1.

К сожалению, задача оптимального оценивания состояния многосвязанной системы по частям сводится к трудоемкому решению взаимосвязанных двухточечных краевых задач [4–7]. Хотя уравнениям фильтров подсистем можно придать рекурсивную форму [6], алгоритм координации все же остается нерекурсивным. Объем вычислений возрастает с увеличением измерений. Поэтому работа алгоритма двухуровневого оптимального оценивания в реальном времени не реализуется. Рекурсивности алгоритма оценки можно достичь, но лишь за счет некоторого отступления от оптимальности.

В данной работе, в отличие от [6,7], состояние подсистем системы (1) оценивается с помощью оптимального фильтра некоторой ее модели и показывается, что ковариационная матрица действительной ошибки остается ограниченной. Модель выбирается так, чтобы оценки состояния подсистем определялись рекурсивно и корригировались только по информации о текущем такте от остальных подсистем. Весовые коэффициенты $p_i(\alpha_{m,i}\mid Y_k)$ вычисляются в подсистемах также рекурсивно.

2. Фильтр модели подсистемы

Рассмотрим фильтр следующей модели системы (1)

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(k+1)&=A_i(k,\alpha_i)\tilde{x}_i(k)+u_i(k)+A_{ij}\bar{x}_j(k),\\ \tilde{y}_i(k)&=H_i\tilde{x}_i(k)+v_i(k)\end{aligned} \tag{4}$$

$$k=1,2,\ldots;\ i,j=1,2;\ i\neq j.$$

В данной модели через взаимосвязи на объект воздействуют вместо переменных состояния их оценки $\bar{x}_j(k)$. Поскольку $\bar{x}_j(k)$ величина детерминированная, уравнения фильтра Калмана для $\tilde{x}_1(k)$ и $\tilde{x}_2(k)$ принимают стандартный вид:

$$\bar{x}_i(k)=A_i(k)\bar{x}_i(k-1)+\bar{u}_i(k)+z_i(k) \tag{5}$$

$$k=1,2,\ldots;\ i=1,2,$$

где

$$\bar{u}_i(k)=C_i(k)H'_i(k)R_i^{-1}(k)\left[\tilde{y}_i(k)-H_i(k)\left(A_i(k)\bar{x}_i(k-1)+z_i(k)\right)\right],$$

$$C_i(k)=\left(I+P_i(k)H'_i(k)R_i^{-1}(k)H_i(k)\right)^{-1}P_i(k),$$

$$P_i(k+1)=A_i(k)C_i(k)A'_i(k)+Q_i(k).$$

Уравнение (5) выписано для одного из дискретных значений параметра α_i. Предполагается, что начальная оценка $\bar{x}_i(0)$, как обычно, нормальна, статистически независима от $v_i(k)$ и $u_i(k)$, задана ее средней m_i и положительно определенной диагональной ковариационной матрицей $P_i(0)$. Детерминированное слагаемое $z_i(k)$ содержит, согласно модели (4), оценки состояния $x_j(k)$.

Оптимальное значение $z_i(k)$ практически не вычисляется из-за необходимости учета всей последовательности оптимальных оценок $\{\bar{x}_j(0|Y_k),\ \ldots,\ \bar{x}_j(k-1|Y_k)\}$ [2]. Если же для вычисления $z_i(k)$ воспользоваться последовательностью оценок $\{\bar{x}_j(0|Y_1),\ \ldots,\ \bar{x}_j(k-2|Y_{k-1}),\ \bar{x}_j(k-1|Y_k)\}$, получим $z_i(k)$ с некоторой ошибкой, но вычисления упростятся значительно. В этом случае $z_i(k)$ будет зависеть лишь от $\bar{x}_j(k-1|Y_k)$ и последнего измерения $\tilde{y}_j(k)$:

$$z_i(k)=A_{ij}(k)\bar{x}_j(k-1|Y_k)+P_{ij}(k)\lambda_j(k-1), \tag{6}$$

где

$$P_{ij}(k)=A_i(k)C_i(k-1)A'_{ji}(k),$$

$$\lambda_j(k-1)=H'_j(k)R_j^{-1}(k)(\tilde{y}_j(k)-H_j(k)\bar{x}_j(k|Y_k)) \tag{7}$$

$$k=1,\ 2,\ \ldots;\quad i,\ j=1,\ 2;\quad i\neq j.$$

Оценки состояния $\bar{x}(k-1|Y_k)$ и $\bar{x}(k|Y_k)$ связаны соотношением [5]

$$\bar{x}(k|Y_k)=A(k)\bar{x}(k-1|Y_k)+Q(k)\lambda(k-1). \tag{8}$$

Система уравнений (5)—(8) определяет $\bar{x}_i(k)$ однозначно.

Поскольку нас интересует пригодность использования оценок $\bar{x}_i(k|Y_k)$ в качестве оценок состояния объекта (1), заменим в системе (5)—(8) $\tilde{y}_i(k)$ действительными измерениями $y_i(k)$ и выпишем уравнение для ошибки $\varepsilon_i(k)=x_i(k)-\bar{x}_i(k)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(k)=\Theta_i(k)\,[A_i(k)\varepsilon_i(k-1)+A_{ij}(k)\varepsilon_j(k-1|Y_k)+\\ +u_i(k-1)-P_{ij}(k)H'_j(k)R_j^{-1}(k)(H_j(k)\varepsilon_j(k)+v_j(k))],\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\Theta_i(k)=I-C_i(k)H'_i(k)R_j^{-1}(k)H_i(k).$$

Уравнения (1) и (8) устанавливают связь между $\varepsilon(k)$ и $\varepsilon(k-1|Y_k)$:

$$\varepsilon(k)=S^{-1}(k)\,[A(k)\varepsilon(k-1|Y_k)+u(k-1)-Q(k)H(k)R^{-1}(k)v(k)], \tag{10}$$

где

$$S(k)=I+Q(k)H'(k)R^{-1}(k)H(k).$$

Решив формулу (10) относительно $\varepsilon(k-1|Y_k)$ и подставив $\varepsilon_i(k-1|Y_k)$ в уравнение (9), мы могли бы выписать рекурсивное уравнение для ковариационной матрицы ошибки $E[\varepsilon(k)\varepsilon'(k)]$ и проанализировать ее поведение. Не станем этого делать из-за громоздкости преобразований. По предположению начальная оценка $\bar{x}(0)$ несмещенна и $E[u(k)]=E[v(k)]=0$. При этих условиях из соотношений (9) и (10) непосредственно вытекает, что оценка $\bar{x}(k)$ также несмещенна.

Матрицы $\Theta_i(k)$ и $S^{-1}(k)$ симметричные, положительно определенные, их собственные числа меньше единицы [8], т. е. свободное движение, определяемое первым слагаемым уравнения (9)

$$\varepsilon_i(k) = \Theta_i(k) A_i(k) \varepsilon_i(k-1),$$

затухает (объект полностью управляем), а остальные слагаемые остаются ограниченными. Верхнюю границу для ковариационной матрицы ошибки можно определить по методике, использованной в [9].

3. Алгоритм оценивания подсистем

Вычисление оценок состояния подсистемы реализуется по двухуровневой схеме. На первом уровне используются уравнения (3), (5)—(7). Найденные $\bar{x}_i(k|Y_k)$, а также $\lambda_i(k-1)$ сообщаются на второй уровень для вычисления по уравнению (8) уточненных $\bar{x}_i(k-1|Y_k)$.

Необходимые в пакете фильтров (3) весовые коэффициенты (вероятности появления определенного значения параметра) уточняются рекурсивно по информации с пакета фильтров подсистем.

Известно, что

$$p(\alpha_m | Y_k) = \frac{p(Y_k, \alpha_m)}{p(Y_k)} = \frac{p(y(k), \alpha_m | Y_{k-1})}{p(y(k) | Y_{k-1})}.$$

Та же запись в рекурсивной форме для i-й подсистемы:

$$p(\alpha_{m,i} | Y_k) = \frac{p(y_i(k) | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}) p(\alpha_{m,i} | Y_{k-1})}{\sum\limits_{m=1}^{N} p(y_i(k) | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}) p(\alpha_{m,i} | Y_{k-1})},$$

$$p = (\alpha_{m,i} | Y_0) = p(\alpha_{m,i}) \quad k = 1, 2, \ldots; \; i = 1, 2. \tag{11}$$

Здесь $p(y_i(k) | Y_{k-1}; \alpha_{m,i})$ — условная плотность вероятности $y_i(k)$ при фиксированных $\alpha_{m,i}$ и Y_{k-1}, вычисленная для измеренного значения $y_i(k)$.

Заметим, что $y_i(k)$ нормальна с условной средней величиной

$$\bar{y}_i(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}) = H_i(k) \bar{x}_i(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i})$$

и условной ковариационной матрицей

$$P_{y,i}(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}) = H_i(k) P_i(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}) H'_i(k).$$

Учитывая это, приведем (11) к окончательному виду

$$p(\alpha_{m,i} | Y_k) = \frac{|P_{y,i}(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i})|^{-1/2} \exp[-W_i(k | \alpha_{m,i})] p(\alpha_{m,i} | Y_{k-1})}{\sum\limits_{m=1}^{N} |P_{y,i}(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i})|^{-1/2} \exp[-W_i(k | \alpha_{m,i})] p(\alpha_{m,i} | Y_{k-1})},$$

$$p(\alpha_{m,i} | Y_0) = p(\alpha_{m,i}) \quad k = 1, 2, \ldots; \; i = 1, 2, \; m = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

где

$$W_i(k | \alpha_{m,i}) = \hat{y}'_i(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}) P_{y,i}^{-1} y_i(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}),$$

$$\hat{y}_i(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}) = y_i(k) - \bar{y}_i(k | Y_{k-1}; \alpha_{m,i}).$$

Нужные для вычисления $p(\alpha_{m,i}|Y_k)$ величины $\bar{x}_i(k|Y_{k-1};\ \alpha_{m,i})$ и $P_i(k|Y_{k-1};\ \alpha_{m,i})$ содержатся в уравнениях фильтра (5) модели подсистемы, полученной для значения параметра $\alpha_{m,i}$.

4. Пример оценивания и выводы

Метод Магилла [1] обладает рядом преимуществ и недостатков. Главным преимуществом является возможность адаптивного оценивания параметров независимо от того, где эти параметры находятся — в уравнениях объекта, в уравнениях измерителя или в характеристиках возмущений. В [6] показано, что если с увеличением измерений один из весовых коэффициентов $p(\alpha_{m,i}|Y_k)$ стремится к единице (остальные стремятся к нулю), то значение $\alpha_{m,i}$ можно принять за действительное значение параметра α_i.

Основной недостаток метода Магилла — число фильтров (размерность объекта (1)) возрастает экспоненциально числу неизвестных параметров.

Предлагаемый алгоритм децентрализованного оценивания позволяет существенно уменьшить число (и размерность) фильтров при выполнении следующих дополнительных условий: 1) неизвестные параметры не должны находиться во взаимосвязях подсистем; 2) взаимосвязи между подсистемами должны осуществляться только подматрицами A_{ij} объекта.

Однако получаемая оценка состояния остается неоптимальной.

Первое условие, в случае подсистемной структуры объекта, ограничивает круг решаемых задач незначительно. Второе условие, как правило, также выполняется, поскольку матрица измерителя $H(k)$ блочно-диагональная или диагональная. При диагональной матрице возможно дальнейшее значительное сокращение объема вычислений за счет последовательного (по одному компоненту вектора измерений) расчета коэффициентов $p(\alpha_{m,i}|Y_k)$ и $C_i(k)$ [10, 11] фильтров подсистемы.

Далее, если в задаче оптимального управления главной характеристикой решения является ее оптимальность в фиксированные моменты времени, то в задачах рекурсивного оценивания главным считается свойство улучшения оценок. Некоторое отступление при этом от оптимальности допустимо.

Рассмотрим действие алгоритма на примере системы из двух сильно связанных подсистем. Примем:

$$u \sim N(0, I),\quad v \sim N(0, I),\quad H = I,\quad n = 6,\quad n_1 = n_2 = 3$$

и

$$A_i(\alpha_i) = \alpha_i A_i,\quad A_{ij} = A_{ji} \quad i, j = 1,\ 2;\quad i \neq j.$$

Имитация процесса идентификации при различной взаимосвязанности подсистем и различных значениях параметров α_i показала хорошую сходимость $p(\alpha_{m,i}|Y_k)$ к единице. Например, при элементах матрицы A, равных $a_{ii} = 0{,}88$, $a_{ij} = -0{,}1$, $p(\alpha_{m,l}) = 0{,}2$, $\alpha_{m,l} = 0{,}7 + 0{,}1\,m$ ($l = 1{,}2$; $m = 1, \ldots, 5$), для $k = 5, 10, 15, 20$ $p(\alpha_{3,l}, k)$ приняла значения 0,59; 0,74; 0,92, 0,98. Расхождение в оценках оптимального фильтра системы (1) и фильтра моделей подсистем (5) несколько возрастает с увеличением взаимосвязанности подсистем. Для приведенного выше числового примера после 20 шагов отношение следов ковариационных матриц ошибки оценивания составило $\beta = 1{,}17$. При $A_{ij} = 0$ фильтрами подсистем будут несвязанные фильтры Калмана ($\beta = 1{,}0$).

В заключение отметим, что предлагаемый алгоритм адаптивного оценивания системы большой размерности, состоящей из взаимосвязанных подсистем, рекурсивный, что дает возможность применять его в системах реального времени. Работа алгоритма состоит в многократном обращении к подпрограмме фильтра (5) подсистемы. Это позволяет в процессе уточнения значений неизвестных параметров переходить от метода Магилла к методу неадаптивного оценивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Magill, D. T., IEEE Trans. on Autom. Control, **AC-10**, No. 4, 434 (1965).
2. Рандвеэ И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **22**, 443 (1973).
3. Smith, N. J., Sage, A. P., Automatica, **9**, No. 6, 677 (1973).
4. Chen, R. M., Perlis, H. J., Proc. JACC, 1967, p. 236.
5. Cox, H., IEEE Trans. on Autom. Control, **AC-9**, No. 5, 5 (1964).
6. Fry, C. M., Sage, A. P., Int. J. Control, **20**, No. 3, 433 (1974).
7. Noton, A. R. M., IEEE Trans. on Autom. Control, **AC-16**, No. 2, 128 (1971).
8. Уилкинсон Дж., Алгебраическая проблема собственных значений, М., 1970.
9. Deyst, J. Jr., Price, C. F., IEEE Trans. on Autom. Control, **AC-13**, No. 6, 702 (1968).
10. Hawkes, R. M., Moore, J. B., IEEE Trans. on Autom. Control, **AC-20**, No. 1, 137 (1975).
11. Singer, R. A., Sea, R. G., IEEE Trans. on Autom. Control, **AC-16**, No. 3, 254 (1971).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/VII 1976

I. RANDVEE

SEOSTATUD ALAMSÜSTEEMIDE OLEKU ADAPTIIVSEST HINDAMISEST

On esitatud algoritm tundmatuid parameetreid sisaldavate seostatud alamsüsteemide oleku rekursiivseks hindamiseks Magilli meetodil. Hindamine toimub süsteemi lihtsustatud mudeli optimaalse filtri alusel. Mudeli lihtsustamise negatiivseks küljeks on oleku hinnangute mitteoptimaalsus, kuid samal ajal tagab see algoritmi rekursiivsuse, mis teeb võimalikuks seostatud alamsüsteemide oleku adaptiivse hindamise reaalajas.

I. RANDVEE

ADAPTIVE ESTIMATION SCHEME FOR LINEAR SUBSYSTEMS

A recursive state estimation of the linear discrete-time subsystems by the method of Magill is considered, and examples are given which compare the optimal and suggested algorithms.