

Р. ЛЕПП

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ ДОПУСТИМОЙ ТОЧКИ В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

1. Во многих методах решения экстремальных задач с ограничением предполагается, что известная начальная точка принадлежит допустимой области. В детерминированных задачах для нахождения точки x , удовлетворяющей неравенству $g(x) \leq 0$, разработано много методов (см., напр., [1, 2]). В настоящей работе рассматривается один метод нахождения допустимого решения в задачах стохастического программирования. Требуется найти точку $x \in R^r$, удовлетворяющую неравенству

$$Eg(x, \xi) \leq 0, \quad (1)$$

где ξ — k -мерный случайный вектор и E — символ математического ожидания. Решение неравенства (1) основано на использовании отдельных реализаций случайного вектора ξ . Рассматривается только случай, когда функция $g(x, \xi)$ сепарабельна, т. е. когда

$$g(x, \xi) = f(x) + h(\xi).$$

2. Для нахождения точки x из множества

$$Q = \{x : f(x) + Eh(\xi) \leq 0\} \quad (2)$$

предложим итерационный метод

$$x_n = x_{n-1} - \gamma_n(x_{n-1} - P_n(x_{n-1})), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $0 \leq \gamma_n \leq 1$, а $P_n(x)$ — проекция точки x на множество $Q_n = \{x : f(x) + h(\xi_n) \leq 0\}$, т. е. $\|x - P_n(x)\| = \min_{y \in Q_n} \|x - y\|$ и ξ_n — случай-

ные величины, независимые и распределенные так же, как ξ .

Нахождение точки из множества Q эквивалентно минимизации функции $I(x) = 1/2 \|x - P(x)\|^2$, где $P(x)$ — проекция точки x на множество Q . Тогда $I(x) \geq 0$ и $Q = \{x : I(x) = 0\}$. Приведем некоторые свойства операции проектирования и функции $I(x)$, которые нам понадобятся в дальнейшем. Предположим, что множество Q выпукло и замкнуто.

Лемма 1. Вектор $x - P(x)$ является опорным к Q в точке $P(x)$, т. е.

$$(x - P(x), y - P(x)) \leq 0, \quad y \in Q. \quad (4)$$

Лемма 2. Оператор проектирования является нерастягивающим, т. е.

$$\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Доказательства лемм 1 и 2 см. в [2].

Лемма 3. Функция $I(x)$ выпукла, дифференцируема и $\text{grad } I(x) = x - P(x)$. Доказательство см. в [3] (лемма 16.2, с. 135).

Перейдем теперь к исследованию свойств метода (3). Обозначим через F_{n-1} наименьшую σ -алгебру, порожденную случайными величинами x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Для дальнейшего изложения предположим, что множества Q_n почти наверное (п. н.) не пусты, т. е.

$$P[Q_n = \emptyset, n=1, 2, \dots] = 0,$$

и что $E\{\|P_n(x)\| | F_{n-1}\} < \infty$ и $E\{\|P_n(x)\|^2 | F_{n-1}\} < \infty$.

Лемма 4. Если функция $f(x)$ выпукла и дифференцируема, то

$$E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\} \in Q.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу условий, наложенных на функцию $f(x)$, множества Q_n выпуклы и замкнуты при всех $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, проекции $P_n(x)$ существуют и единственны для почти всех x (см., напр., [4], с. 286), поэтому метод (3) имеет смысл. Из выпуклости и дифференцируемости функции $f(x)$ получим, что

$$f(P_n(x_{n-1})) + h(\xi_n) \geq f(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) + h(\xi_n) + \\ + (f'(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}), P_n(x_{n-1}) - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}).$$

Возьмем из этого неравенства условное математическое ожидание относительно σ -алгебры F_{n-1} :

$$E\{f(P_n(x_{n-1})) | F_{n-1}\} + E\{h(\xi_n) | F_{n-1}\} \geq E\{f(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) | F_{n-1}\} + \\ + E\{h(\xi_n) | F_{n-1}\} + E\{(f'(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}), P_n(x_{n-1}) - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) | F_{n-1}\},$$

$$P_n(x_{n-1}) - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\} = f(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) + Eh(\xi) + \\ + (f'(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}), E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) = \\ = f(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) + Eh(\xi).$$

Так как

$$f(P_n(x_{n-1})) + h(\xi_n) \leq 0 \quad \text{при } x_{n-1} \in Q_n$$

и

$$f(P_n(x_{n-1})) + h(\xi_n) = 0 \quad \text{при } x_{n-1} \notin Q_n,$$

то

$$f(E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) + Eh(\xi) \leq 0, \quad \text{т. е. } E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\} \in Q.$$

Лемма доказана.

В работе [5] для минимизации детерминированного гладкого функционала $F(x)$ рассмотрен итерационный метод вида $x_n = x_{n-1} - \gamma_n s_n$, где $\gamma_n \geq 0$ и s_n — некоторое случайное направление движения, зависящее от всех предыдущих значений x и от n . В [5] s_n называется псевдоградиентом $F(x)$ в точке x_{n-1} , если

$$(F'(x_{n-1}), E\{s_n | F_{n-1}\}) \geq 0,$$

т. е. если вектор s_n в среднем направлен под острым углом к градиенту.

Покажем, что вектор $x_{n-1} - P_n(x_{n-1})$ является псевдоградиентом функции $I(x) = 1/2 \|x - P(x)\|^2$ в точке x_{n-1} .

Лемма 5. Если функция $f(x)$ выпукла и дифференцируема, то

$$(I'(x_{n-1}), E\{x_{n-1} - P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) \geq 0.$$

Доказательство. По лемме 3 $I'(x) = x - P(x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & (I'(x_{n-1}), E\{x_{n-1} - P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) = \\ & = (x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) = \\ & = \|x_{n-1} - P(x_{n-1})\|^2 + (x_{n-1} - P(x_{n-1}), P(x_{n-1}) - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) \geq 0, \end{aligned}$$

так как по лемме 4 $E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\} \in Q$ и по лемме 1 $(x_{n-1} - P(x_{n-1}), P(x_{n-1}) - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) \geq 0$. Лемма доказана.

Оценим теперь псевдоградиент $x_{n-1} - P_n(x_{n-1})$.

Лемма 6. Для псевдоградиента $x_{n-1} - P_n(x_{n-1})$ справедлива оценка

$$\|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\| \leq \|x_0 - P_n(x_0)\|.$$

Доказательство. Для любых $h(\xi_{n-1})$ и $h(\xi_n)$ либо 1) $Q_n \subset Q_{n-1}$, либо 2) $Q_{n-1} \subset Q_n$ в силу сепарабельности функции $g(x, \xi) = f(x) + h(\xi)$. Если выполнено включение 1), то

$$\begin{aligned} & \|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\| \leq \|x_{n-1} - P_n(x_{n-2})\| = \\ & = \|x_{n-2} - \gamma_{n-1}(x_{n-2} - P_{n-1}(x_{n-2})) - P_n(x_{n-2})\| = \\ & = \|(1 - \gamma_{n-1})x_{n-2} + \gamma_{n-1}P_{n-1}(x_{n-2}) - P_n(x_{n-2})\| = \\ & = \|(1 - \gamma_{n-1})(x_{n-2} - P_n(x_{n-2})) + \gamma_{n-1}(P_{n-1}(x_{n-2}) - P_n(x_{n-2}))\| \leq \\ & \leq (1 - \gamma_{n-1})\|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\| + \gamma_{n-1}\|P_{n-1}(x_{n-2}) - P_n(x_{n-2})\| = \\ & = (1 - \gamma_{n-1})\|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\| + \gamma_{n-1}\|P_{n-1}(x_{n-2}) - P_{n-1}(P_n(x_{n-2}))\| \leq \\ & \leq (1 - \gamma_{n-1})\|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\| + \gamma_{n-1}\|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\| = \\ & = \|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\|. \end{aligned}$$

Последнее неравенство имеет место в силу леммы 2. Если выполнено включение 2), то в силу выпуклости функции $\|x - P(x)\|^2$ имеем

$$\begin{aligned} & \|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2 \leq \|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\|^2 - \\ & - 2\gamma_{n-1}(x_{n-1} - P_n(x_{n-1}), x_{n-2} - P_{n-1}(x_{n-2})) = \\ & = \|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\|^2 - 2\gamma_{n-1}(x_{n-1} - P_n(x_{n-1}), P_n(x_{n-1}) - P_{n-1}(x_{n-2})) - \\ & - 2\gamma_{n-1}(x_{n-1} - P_n(x_{n-1}), x_{n-2} - P_n(x_{n-1})) \leq \\ & \leq \|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\|^2 - 2\gamma_{n-1}(x_{n-1} - P_n(x_{n-1}), x_{n-2} - P_n(x_{n-1})). \end{aligned}$$

Выполнение последнего неравенства гарантируется леммой 1. Покажем, что $(x_{n-1} - P_n(x_{n-1}), x_{n-2} - P_n(x_{n-1})) \geq 0$. Можем записать

$$\begin{aligned} & (x_{n-1} - P_{n-1}(x_{n-2}), x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) = \|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2 + \\ & + (P_n(x_{n-1}) - P_{n-1}(x_{n-2}), x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) \geq 0, \end{aligned}$$

так как $P_{n-1}(x_{n-2}) \in Q_n$. Но

$$\begin{aligned} x_{n-1} - P_{n-1}(x_{n-2}) &= (1 - \gamma_{n-1})x_{n-2} + \gamma_{n-1}P_{n-1}(x_{n-2}) - P_{n-1}(x_{n-2}) = \\ &= (1 - \gamma_{n-1})(x_{n-2} - P_{n-1}(x_{n-2})) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_{n-2} - x_{n-1} &= x_{n-2} - (1 - \gamma_{n-1})x_{n-2} - \gamma_{n-1}P_{n-1}(x_{n-2}) = \\ &= \gamma_{n-1}(x_{n-2} - P_{n-1}(x_{n-2})). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &(x_{n-1} - P_{n-1}(x_{n-2}), x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) = \\ &= (1 - \gamma_{n-1})(x_{n-2} - P_{n-1}(x_{n-2}), x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) = \\ &= \frac{(1 - \gamma_{n-1})}{\gamma_{n-1}}(x_{n-2} - x_{n-1}, x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) \geq 0 \end{aligned}$$

и так как $0 \leq \gamma_{n-1} \leq 1$, то при $\gamma_{n-1} \neq 0$

$$(x_{n-2} - x_{n-1}, x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) \geq 0.$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} (x_{n-1} - P_n(x_{n-1}), x_{n-2} - P_n(x_{n-1})) &= (x_{n-1} - P_n(x_{n-1}), x_{n-2} - x_{n-1}) + \\ &+ \|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\| \leq \|x_{n-2} - P_n(x_{n-2})\|.$$

Заметим, что при $\gamma_n = 0$ последнее неравенство выполняется автоматически. Завершая доказательство, отметим, что при любых ξ_{n-2} и ξ_n либо $Q_n \subset Q_{n-2}$, либо $Q_{n-2} \subset Q_n$. Далее ход рассуждений повторяется.

Исходя из лемм 4—6 докажем следующую теорему.

Теорема. Если функция $g(x, \xi)$ сепарабельна, функция $f(x)$ выпукла и дифференцируема, $E\{\|P_n(x_0)\|^2 | F_{n-1}\} \leq K(x_0) < \infty$,

$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty$, $0 \leq \gamma_n \leq 1$, то последовательность $\{x_n\}$, определенная соотношением (3), п. н. такова, что для нее существует предел $I(x_n)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(x_n, Q) \stackrel{\text{п.п.}}{=} 0.$$

Доказательство. В силу метода (3) имеем

$$\begin{aligned} 1/2 \|x_n - P(x_n)\|^2 &\leq 1/2 \|x_n - P(x_{n-1})\|^2 = 1/2 \|x_{n-1} - P(x_{n-1})\|^2 - \\ &- \gamma_n (x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) + \gamma_n^2 / 2 \|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} I(x_n) &\leq I(x_{n-1}) - \gamma_n (x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - P_n(x_{n-1})) + \\ &+ \gamma_n^2 / 2 \|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2, \end{aligned}$$

поскольку $I(x) = 1/2 \|x - P(x)\|^2$.

Возьмем условное математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства относительно σ -алгебры F_{n-1} :

$$E\{I(x_n) | F_{n-1}\} \leq I(x_{n-1}) - \gamma_n(x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) + \\ + \gamma_n^2 / 2E\{\|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2 | F_{n-1}\}. \quad (5)$$

Введем обозначение

$$K = \|x_0\|^2 + K(x_0).$$

Используя результаты лемм 5 и 6 и неравенство $\|x_0 - P_n(x_0)\|^2 \leq 2\|x_0\|^2 + 2\|P_n(x_0)\|^2$, получим $E\{I(x_n) | F_{n-1}\} \leq I(x_{n-1}) + \gamma_n^2 K$. На основании теоремы 1 из работы [6] можно утверждать, что п. н. существует $\lim I(x_n)$ и математические ожидания $EI(x_n)$ равномерно ограничены

$$EI(x_n) \leq a. \quad (6)$$

Перейдем теперь к математическим ожиданиям в неравенстве (5):

$$EI(x_n) \leq EI(x_{n-1}) - \gamma_n E(x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) + \\ + \gamma_n^2 / 2EE\{\|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2 | F_{n-1}\}. \quad (7)$$

Просуммируем (7) по n от 1 до ∞ . В силу (6) и условий на $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2$ получим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^2 EE\{\|x_{n-1} - P_n(x_{n-1})\|^2 | F_{n-1}\} < \infty$. Следовательно,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n E(x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) > -\infty$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n E(x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) < \infty. \quad (8)$$

Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty \text{ и } (x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) \geq 0,$$

поэтому из (8) следует, что найдется подпоследовательность n_i , для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(x_{n_i-1} - P(x_{n_i-1}), x_{n_i-1} - E\{P_{n_i}(x_{n_i-1}) | F_{n_i-1}\}) = 0.$$

Значит, существует подпоследовательность n_j такая, что п. н.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n_j-1} - P(x_{n_j-1}), x_{n_j-1} - E\{P_{n_j}(x_{n_j-1}) | F_{n_j-1}\}) = 0.$$

Учитывая лемму 5, придем к выводу, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) \stackrel{п.н.}{=} 0.$$

В силу леммы 5 имеем

$$(x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) = \\ = \|x_{n-1} - P(x_{n-1})\|^2 + (x_{n-1} - P(x_{n-1}), P(x_{n-1}) - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) \geq$$

$$\geq \|x_{n-1} - P(x_{n-1})\|^2.$$

Следовательно, если для любого $\varepsilon > 0$

$$I(x_{n-1}) = 1/2 \|x_{n-1} - P(x_{n-1})\|^2 \geq \varepsilon,$$

то

$$(x_{n-1} - P(x_{n-1}), x_{n-1} - E\{P_n(x_{n-1}) | F_{n-1}\}) \geq 2\varepsilon$$

и так как последовательность $I(x_n)$ п. н. имеет предел, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/2 \|x_n - P(x_n)\|^2 \stackrel{\text{п. н.}}{=} 0$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(x_n, Q) \stackrel{\text{п. н.}}{=} 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть в дополнение к условиям теоремы $\lim f(x) = +\infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{x_n\}$, определенная соотношением (3), п. н. сходится к некоторой точке множества Q .

Доказательство. Так как $f(P(x_n)) = -Eh(\xi) = C$ при каждом x_n , то существует L такое, что $\|P(x_n)\| \leq L$ при каждом x_n . Повторяя рассуждения леммы 6 для $Eh(\xi)$ и $h(\xi_n)$, получим, что

$$\|x_n - P(x_n)\| \leq \|x_{n-1} - P(x_{n-1})\| \leq \|x_0 - P(x_0)\| \leq M(x_0) < \infty.$$

Следовательно,

$$\|x_n\| \leq \|P(x_n)\| + \|x_n - P(x_n)\| \leq \|P(x_n)\| + \|x_0 - P(x_0)\| \leq L + M(x_0).$$

Из ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \rightarrow x^*$. Но согласно теореме п. н. $I(x_{n_k}) \rightarrow 0$, т. е. $I(x^*) = 0$. А поскольку п. н. существует $\lim I(x_n)$, то и $\lim I(x_n) \stackrel{\text{п. н.}}{=} 0$. Следовательно, $x_n \xrightarrow{\text{п. н.}} x^* \in Q$. Следствие доказано.

Рассмотренный метод (3) эффективен лишь в том случае, когда операция проектирования проста. В качестве примера рассмотрим следующую задачу: найти точку из множества

$$Q = \{x : (a, x) \leq (b, E\xi)\}, \quad a, b, x, \xi \in R^r.$$

Тогда

$$P_n(x_{n-1}) = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{если } (a, x_{n-1}) \leq (b, \xi_n), \\ x_{n-1} - \frac{(a, x_{n-1}) - (b, \xi_n)}{\|a\|^2} a, & \text{если } (a, x_{n-1}) > (b, \xi_n), \end{cases}$$

и

$$x_n = \begin{cases} x_{n-1}, & \text{если } (a, x_{n-1}) \leq (b, \xi_n), \\ x_{n-1} - \gamma_n \frac{(a, x_{n-1}) - (b, \xi_n)}{\|a\|^2} a, & \text{если } (a, x_{n-1}) > (b, \xi_n). \end{cases}$$

Автор признателен Т. Тобиасу за внимание к работе и И. Петерсену за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманов В. Г., Математическое программирование, М., 1974.
2. Гурин Л. Г., Поляк Б. Т., Райк Э. В., ЖВМ и МФ, 7, № 6, 1211 (1967).

3. Итеративные методы в теории игр и программировании. Под ред. В. З. Беленского и В. А. Волконского, М., 1974.
4. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, М., 1959.
5. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З., Автоматика и телемеханика, № 3, 45 (1973).
6. Гладышев Е. Г., Теория вероятности и ее применения, X, № 2, 297 (1965).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
30/VI 1976

R. LEPP

STOCHASTILISE APROKSIMATSIOONI PROJEKTSIOONIMEETOD STOCHASTILISE PLANEERIMISÜLESANDE LUBATAVA LAHENDI LEIDMISEKS

Mingi punkti leidmiseks hulgast $Q = \{x : f(x) + Eh(\xi) \leq 0\}$ esitatakse juhusliku vektori ξ realisatsioonidel ξ_n põhinev projektsioonimeetod. Projekteeritakse hulgale $Q_n = \{x : f(x) + h(\xi_n) \leq 0\}$. Esitatud meetodil saadud jada koondub tõenäosusega 1 hulga Q mingiks punktiks.

R. LEPP

PROJECTION METHOD OF STOCHASTIC APPROXIMATION FOR SEEKING A FEASIBLE SOLUTION IN STOCHASTIC PROGRAMMING

A projection method based on the realization ξ_n of random vector ξ is presented for seeking a point from the set $Q = \{x : f(x) + Eh(\xi) \leq 0\}$. The projection is realized on a set $Q_n = \{x : f(x) + h(\xi_n) \leq 0\}$. The convergence conditions of the method with probability 1 are presented.