EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 2

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН, Ю. ГИРШОВИЧ

НАИЛУЧШИЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА МНОЖЕСТВАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В работе используются следующие обозначения:

$$\|\varphi(\cdot)\|_q=[\int_0^1|\varphi(x)|^q\,dx]^{1/q},\quad \|f(\cdot,\cdot)\|_q=[\int_0^1\int_0^1|f(x,y)|^q\,dx\,dy]^{1/q},$$

$$f^{(j,l)}(x,y)=\frac{\partial^{j+l}}{\partial x^j\,\partial y^l}f(x,y),$$

$B_k^*(x)\equiv B_k(x)$ при $x\in[0,1)$ и $B_k^*(x+1)\equiv B_k^*(x)$, где $B_k(x)$ — многочлен Бернулли степени k. Числа r, s, m, $n\geqslant 1$, $0\leqslant\varrho_i<r$ $(i=1,\ldots,m)$, $0\leqslant\sigma_k<s$ $(k=1,\ldots,n)$, $1<q<\infty$, M, P, $Q>0$ считаем заданными, $p=q/(q-1)$.

Через $\tilde{W}_q^{rs}$ обозначим множество всех функций $f(x,y)$, которые имеют при всех вещественных значениях x и y непрерывные производные $f^{(i,j)}(x,y)$ $(i=0,\ldots,r-1;\ j=0,\ldots,s-1)$, кусочно-непрерывные производные $f^{(r,j)}(x,y)$, $f^{(i,s)}(x,y)$ $(j=0,\ldots,s;\ i=0,\ldots,r)$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} f(x+1,y)\equiv f(x,y+1)\equiv f(x,y),\\ \|f^{(r,s)}(\cdot,\cdot)\|_q\leqslant Q,\quad \|\varphi_f^{(r)}(\cdot)\|_q\leqslant M,\quad \|\psi_f^{(s)}(\cdot)\|_q\leqslant P, \end{gathered}\tag{1}$$

где

$$\varphi_f^{(r)}(\cdot)=\int_0^1 f^{(r,0)}(\cdot,u)\,du,\quad \psi_f^{(s)}(\cdot)=\int_0^1 f^{(0,s)}(t,\cdot)\,dt.$$

Рассмотрим задачу нахождения наилучшей [1-2] на множестве $\tilde{W}_q^{rs}$ кубатурной формулы вида

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{\varrho_i}\sum_{l=0}^{\sigma_k}A_{ikjl}f^{(j,l)}(x_i,y_k)+R_{mn}(f).\tag{2}$$

Другими словами, найдем значения узлов (x_i,y_k) и весов A_{ikjl} $(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n;\ j=0,\ldots,\varrho_i;\ l=0,\ldots,\sigma_k)$, которые доставляют наименьшее значение величине

$$R_{mn}=\sup_{f\in\tilde{W}_q}|R_{mn}(f)|.$$

Для решения этой задачи нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть функции* $\pi_j(x)$ $(j = 0, \ldots, N)$ *линейно независимы в* $L_p(0, 1)$. *Для того чтобы числа* $a_0, \ldots, a_N$ *доставляли наименьшее значение величине*

$$I = \int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big|^p dx$$

при условии $a_1 + \ldots + a_\nu = 1$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N$, ν *фиксировано*), *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* μ *выполнялись равенства*

$$\int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big|^{p-1} \operatorname{sign} \Big(\sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big) \pi_j(x)\, dx = \mu_j \qquad (j = 0, \ldots, N), \quad (3)$$

$\mu_j = \mu$ *при* $1 \leqslant j \leqslant \nu$, $\mu_j = 0$ *в остальных случаях*, $a_1 + \ldots + a_\nu = 1$.

Доказательство. Необходимость условий (3) сразу следует из необходимых условий минимума функции Лагранжа $L = I - \mu p (a_1 + \ldots + a_\nu - 1)$.

Докажем достаточность этих условий. Пусть числа $a_0, \ldots, a_N$ удовлетворяют равенствам (3), $b_0, \ldots, b_N$ — произвольные числа, $b_1 + \ldots + b_\nu = 1$. Тогда

$$\int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big|^{p-1} \operatorname{sign} \Big(\sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big) \sum_{j=0}^{N} b_j \pi_j(x)\, dx = \sum_{j=0}^{N} b_j \mu_j = \mu,$$

т. е. это выражение не зависит от выбора чисел $b_0, \ldots, b_N$; в частности,

$$\int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big|^p dx = \int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big|^{p-1} \operatorname{sign} \Big(\sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big) \sum_{j=0}^{N} b_j \pi_j(x)\, dx.$$

Применяя к правой части этого равенства неравенство Гёльдера, получим неравенство

$$\int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N} a_k \pi_k(x) \Big|^p dx \leqslant \int_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N} b_k \pi_k(x) \Big|^p dx,$$

которое и доказывает достаточность условий (3).

Лемма 2. *Пусть* $\{\pi_0(x), \ldots, \pi_\alpha(x)\}$ *и* $\{\omega_0(x), \ldots, \omega_\beta(x)\}$ — *множества линейно независимых в* $L_p(0, 1)$ *функций. Для того чтобы числа* a_{ik} $(i = 1, \ldots, \alpha;\ k = 1, \ldots, \beta)$, *функции* $\varphi(x), \psi(y) \in L_p(0, 1)$ *доставляли величине*

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \Big| \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{k=1}^{\beta} a_{ik} \pi_i(x) \omega_k(y) + \varphi(x) \omega_0(y) + \psi(y) \pi_0(x) \Big|^p dx\, dy \quad (4)$$

наименьшее значение при условии

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} \sum_{k=1}^{\nu_2} a_{ik} = 1 \qquad (1 \leqslant \nu_1 \leqslant \alpha,\ 1 \leqslant \nu_2 \leqslant \beta,\ \nu_1, \nu_2 \text{ фиксированы}), \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы при некотором λ *выполнялись равенства*

$$\int_0^1 \int_0^1 |F(x, y)|^{p-1} \operatorname{sign} F(x, y)\, \pi_i(x) \omega_k(y)\, dx\, dy = \lambda_{ik}$$
$$(i = 1, \ldots, \alpha;\ k = 1, \ldots, \beta),$$

$\lambda_{ik} = \lambda$ *при* $1 \leqslant i \leqslant \nu_1$, $1 \leqslant k \leqslant \nu_2$; $\lambda_{ik} = 0$ *в остальных случаях*,

$$\sum_{i=1}^{\nu_1}\sum_{k=1}^{\nu_2} a_{ik}=1, \tag{6}$$

$$\int_0^1 |F(x,y)|^{p-1}\operatorname{sign} F(x,y)\,\pi_0(x)\,dx\equiv 0,$$

$$\int_0^1 |F(x,y)|^{p-1}\operatorname{sign} F(x,y)\,\omega_0(y)\,dy\equiv 0,$$

где

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{k=1}^{\beta} a_{ik}\pi_i(x)\,\omega_k(y)+\varphi(x)\,\omega_0(y)+\psi(y)\,\pi_0(x).$$

Доказательство. Существование наименьшего значения величины (4) при условии (5) следует из относительной слабой компактности ограниченных множеств в $L_p(0,1)$ при $1<p<\infty$ и выпуклости величины (4) как функционала от $\varphi(x)$ и $\psi(y)$. Необходимость условий леммы вытекает из необходимых условий минимума функционала Лагранжа $H=J-\lambda p(\sum_{i=1}^{\nu_1}\sum_{k=1}^{\nu_2} a_{ik}-1)$ и необходимых условий минимума задачи вариационного исчисления.

Докажем достаточность условий леммы. Пусть функция $F(x,y)$ удовлетворяет условиям (6),

$$F_1(x,y)=\sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{k=1}^{\beta} b_{ik}\pi_i(x)\,\omega_k(y)+\varphi_1(x)\,\omega_0(y)+\psi_1(y)\,\pi_0(x),$$

где b_{ik} $(i=1,\ldots,\alpha;\ \ k=1,\ldots,\beta)$ — произвольные числа, $\sum_{i=1}^{\nu_1}\sum_{k=1}^{\nu_2} b_{ik}=1$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)$ — произвольные функции из $L_p(0,1)$. Тогда, в силу (6),

$$\int_0^1\int_0^1 |F(x,y)|^{p-1}\operatorname{sign} F(x,y)\,F_1(x,y)\,dx\,dy=\lambda,$$

откуда, как и при доказательстве леммы 1, получаем достаточность условий (6).

Лемма 3. *Пусть выполнено предположение леммы* 2, *а числа* $b^*_0,\ldots,b^*_\alpha$; $c^*_0,\ldots,c^*_\beta$ *доставляют величинам*

$$\int_0^1 \Big|\sum_{i=0}^{\alpha} b_i\pi_i(x)\Big|^p dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \Big|\sum_{k=0}^{\beta} c_k\omega_k(x)\Big|^p dx$$

при условиях $b_1+\ldots+b_{\nu_1}=1$, $c_1+\ldots+c_{\nu_2}=1$ *наименьшие значения, равные соответственно* γ_1 *и* γ_2. *Тогда величина* (4) *при условии* (5) *достигает наименьшего значения, равного* $\gamma_1\gamma_2$, *при*

$$F(x,y)=\sum_{i=0}^{\alpha}\overset{*}{b}_i\,\pi_i(x)\sum_{k=0}^{\beta}\overset{*}{c}_k\,\omega_k(y). \tag{6a}$$

Для доказательства этой леммы достаточно для функции (6a) проверить справедливость условий (6). Отметим, что эта лемма является обобщением теоремы из работы [3].

Пусть функция $f(x,y)\in \tilde{W}^{rs}_q$. Применяя повторно формулу [4] разложения функции одной переменной по многочленам Бернулли, имеем

$$f(x, y)=\int_0^1\int_0^1 f(t, u)\,dt\,du-\frac{1}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(t, u)\,B_r^*(x-t)\,dt\,du-$$

$$-\frac{1}{s!}\int_0^1\int_0^1 f^{(0,s)}(t, u)\,B_s^*(y-u)\,dt\,du+ \tag{7}$$

$$+\frac{1}{r!s!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,s)}(t, u)\,B_r^*(x-t)\,B_s^*(y-u)\,dt\,du.$$

В дальнейшем, согласно [5], будем считать формулы (2) точными для постоянной, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}A_{ik00}=1. \tag{8}$$

Из свойств периодических функций следует, что

$$\int_0^1\varphi_f^{(r)}(t)\,dt=\int_0^1\psi_f^{(s)}(u)\,du=\int_0^1 f^{(r,s)}(t, u)\,du=\int_0^1 f^{(r,s)}(t, u)\,dt=0. \tag{9}$$

Подставляя выражение (7) в формулу (2) и учитывая равенства (8) и (9), получим

$$R_{mn}(f)=\frac{1}{r!}\int_0^1\varphi_f^{(r)}(t)\,[K_1(t)+C_1]\,dt+\frac{1}{s!}\int_0^1\psi_f^{(s)}(u)\,[K_2(u)+C_2]\,du-$$

$$-\frac{1}{r!s!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,s)}(t, u)\,[K_3(t, u)+\varphi(t)+\psi(u)]\,dt\,du,$$

где

$$K_1(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\rho_i}A_{ikj0}B_r^{*(j)}(x_i-t),$$

$$K_2(u)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{\sigma_k}A_{ik0l}B_s^{*(l)}(y_k-u),$$

$$K_3(t, u)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\rho_i}\sum_{l=0}^{\sigma_k}A_{ikjl}B_r^{*(j)}(x_i-t)\,B_s^{*(l)}(y_k-u),$$

C_1, C_2 — произвольные постоянные, $\varphi(t)$, $\psi(u)$ — произвольные функции из $L_p(0, 1)$. Отсюда с помощью неравенства Гёльдера получаем оценку

$$|R_{mn}(f)|\leqslant\frac{M}{r!}\min_{C_1}\|K_1(.)+C_1\|_p+\frac{P}{s!}\min_{C_2}\|K_2(.)+C_2\|_p+$$

$$+\frac{Q}{r!s!}\min_{\varphi,\psi\in L_p(0,1)}\|K_3(.,.)+\varphi(.)+\psi(.)\|_p=\frac{M}{r!}\|K_1(.)+C_1^*\|_p+ \tag{10}$$

$$+\frac{P}{s!}\|K_2(.)+C_2^*\|_p+\frac{Q}{r!s!}\|K_3(.,.)+\varphi^*(.)+\psi^*(.)\|_p.$$

Из необходимых условий минимума следуют равенства

$$\int_0^1 |K_1(x)+C_1^*|^{p-1}\operatorname{sign}(K_1(x)+C_1^*)\,dx=$$

$$=\int_0^1 |K_2(y)+C_2^*|^{p-1}\operatorname{sign}(K_2(y)+C_2^*)\,dy=0,$$

$$\int_0^1 |K_3(x,y)+\varphi^*(x)+\psi^*(y)|^{p-1}\operatorname{sign}[K_3(x,y)+\varphi^*(x)+\psi^*(y)]\,dx\equiv 0,$$

$$\int_0^1 |K_3(x,y)+\varphi^*(x)+\psi^*(y)|^{p-1}\operatorname{sign}[K_3(x,y)+\varphi^*(x)+\psi^*(y)]\,dy\equiv 0.$$

Так как для принадлежащей в силу этих равенств множеству $\widetilde{W}_q^{rs}$ функции

$$f_0(x,y)=\frac{M\,\|K_1(.)+C_1^*\|_p^{1-p}}{r!}\int_0^1 B_r^*(x-t)|K_1(t)+C_1^*|^{p-1}\operatorname{sign}(K_1(t)+$$

$$+C_1^*)\,dt+\frac{1}{s!}P\,\|K_2(.)+C_2^*\|_p^{1-p}\int_0^1 B_s^*(y-u)|K_2(u)+C_2^*|^{p-1}\operatorname{sign}(K_2(u)+$$

$$+C_2^*)\,du-\frac{1}{r!s!}Q\,\|K_3(.,.)+\varphi^*(.)+\psi^*(.)\|_p^{1-p}\int_0^1\int_0^1 B_r^*(x-t)\,B_s^*(y-u)\times$$

$$\times|K_3(t,u)+\varphi^*(t)+\psi^*(u)|^{p-1}\operatorname{sign}[K_3(t,u)+\varphi^*(t)+\psi^*(u)]\,dt\,du$$

неравенство (10) обращается в равенство, то справедливо соотношение

$$R_{mn}=\frac{M}{r!}\|K_1(.)+C_1^*\|_p+\frac{P}{s!}\|K_2(.)+C_2^*\|_p+\frac{Q}{r!s!}\|K_3(.,.)+\varphi^*(.)+\psi^*(.)\|_p. \tag{11}$$

Таким образом, для построения наилучшей на множестве $\widetilde{W}_q^{rs}$ кубатурной формулы (2) достаточно минимизировать величину (11).

Обозначим через $\widetilde{W}_q^{r}$ множество всех функций $f(x)$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ на всей числовой оси и удовлетворяющих условиям

$$f(x+1)\equiv f(x),\qquad \|f^{(r)}(.)\|_q\leqslant 1.$$

Через C_{ij}^* $(i=1,\ldots,m;\ j=0,\ldots,\varrho_i)$ обозначим веса, а через $\delta_1/r!$ точную оценку ошибки наилучшей [1] на множестве $\widetilde{W}_q^{r}$ формулы

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\rho_i} C_{ij}f^{(j)}(x_i)+R_m(f), \tag{12}$$

где узлы $0\leqslant x_1<\ldots<x_m\leqslant 1$ $(x_m-x_1\neq 1)$ фиксированы.

Аналогично, через D_{kl}^* $(k=1,\ldots,n;\ l=0,\ldots,\sigma_k)$ обозначим веса, через $\delta_2/s!$ точную оценку ошибки наилучшей на множестве $\tilde{W}^s_q$ формулы

$$\int_0^1 f(y)\,dy=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{\sigma_k} D_{kl}f^{(l)}(y_k)+R_n(f) \tag{13}$$

с фиксированными узлами $0\leqslant y_1<\ldots<y_n\leqslant 1$ $(y_n-y_1\neq 1)$.

Теорема 1. *Наилучшая на множестве* $\tilde{W}^{rs}_q$ *формула* (2) *с фиксированными узлами* (x_i, y_k) $(i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,n)$ * *имеет веса*

$$A_{ikjl}=C^*_{ij}D^*_{kl} \tag{14}$$

$$(i=1,\ldots,m;\ j=0,\ldots,\varrho_i;\ k=1,\ldots,n;\ l=0,\ldots,\sigma_k)$$

и точную оценку ошибки

$$R_{mn}=M\frac{\delta_1}{r!}+P\frac{\delta_2}{s!}+Q\frac{\delta_1\delta_2}{r!s!}.$$

Доказательство. Как следует из [1, 6, 7], при условиях

$$\sum_{i=1}^{m}C_{i0}=1,\qquad \sum_{k=1}^{n}D_{k0}=1$$

имеют место неравенства

$$\begin{gathered}\int_0^1\Big|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\rho_i}C_{ij}B_r^{*(j)}(x_i-t)+C_0\Big|^p dt\geqslant\delta_1^p,\\ \int_0^1\Big|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{\sigma_k}D_{kl}B_s^{*(l)}(y_k-u)+D_0\Big|^p dt\geqslant\delta_2^p,\end{gathered} \tag{15}$$

которые обращаются в равенства при

$$\begin{aligned}&C_{ij}=C^*_{ij}\quad(i=1,\ldots,m;\ j=0,\ldots,\varrho_i),\quad C_0=C^*_0,\\ &D_{kl}=D^*_{kl}\quad(k=1,\ldots,n;\ l=0,\ldots,\sigma_k),\quad D_0=D^*_0,\end{aligned}$$

где C^*_0, D^*_0 — некоторые постоянные.
Отсюда и из леммы 3 следует, что при любых $\varphi(t)$, $\psi(u)\in L_p(0,1)$ имеет место неравенство

$$\int_0^1\int_0^1|K_3(t,u)+\varphi(t)+\psi(u)|^p\,dt\,du\geqslant\delta_1^p\,\delta_2^p,$$

для обращения которого в равенство необходимо условие (14). Кроме того, из неравенств (15) следуют неравенства

$$\int_0^1|K_1(t)+C_1|^p\,dt\geqslant\delta_1^p,\qquad \int_0^1|K_2(u)+C_2|^p\,du\geqslant\delta_2^p,$$

также обращающиеся в равенства при весах (14) и $C_1=C^*_0$, $C_2=D^*_0$, что и доказывает теорему.

Обозначим через $\bar{x}_i$, $\bar{C}_{ij}$ $(i=1,\ldots,m;\ j=0,\ldots,\varrho_i)$, $\bar{\delta}_1/r!$ узлы,

---

* Формула (2) называется наилучшей на $\tilde{W}^{rs}_q$ с фиксированными узлами, если ее веса выбраны из условия минимума величины R_{mn} при заданных узлах.

веса и точную оценку ошибки наилучшей на множестве $\widetilde{W}^r_q$ формулы (12), а через $\bar{y}_k$, $\overline{D}_{kl}$ ($k=1, \ldots, n$; $l=0, \ldots, \sigma_k$), $\overline{\delta}_2/s!$ — узлы, веса и точную оценку ошибки наилучшей на множестве $\widetilde{W}^s_q$ формулы (13).

Теорема 2. *Наилучшая на множестве* $\widetilde{W}^{rs}_q$ *формула* (2) *имеет узлы*

$$(x_i, y_k) = (\bar{x}_i, \bar{y}_k) \qquad (i=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n),$$

веса

$$A_{ikjl} = \overline{C}_{ij}\overline{D}_{kl}$$

$$(i=1, \ldots, m;\ j=0, \ldots, \varrho_i;\ k=1, \ldots, n;\ l=0, \ldots, \sigma_k)$$

и точную оценку ошибки

$$R_{mn} = M\frac{\overline{\delta}_1}{r!} + P\frac{\overline{\delta}_2}{s!} + Q\frac{\overline{\delta}_1\overline{\delta}_2}{r!s!}.$$

Для доказательства этой теоремы следует заметить, что величина δ_1 как функция от $x_1, \ldots, x_m$ достигает наименьшего значения, равного $\overline{\delta}_1$, при $x_i = \bar{x}_i$ ($i=1, \ldots, m$), а величина δ_2 как функция от $y_1, \ldots, y_n$ достигает наименьшего значения, равного $\overline{\delta}_2$, при $y_k = \bar{y}_k$ ($k=1, \ldots, n$), а затем воспользоваться результатом теоремы 1.

Одним из возможных применений полученных результатов является следующая

Теорема 3. *Наилучшая на множестве* $\widetilde{W}^{rs}_q$ *формула*

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{ik} f(x_i, y_k) + R_{mn}(f) \tag{16}$$

имеет узлы

$$x_i = \frac{i-\theta_1}{m}, \quad y_k = \frac{k-\theta_2}{n} \quad (i=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n), \tag{17}$$

где θ_1 *и* θ_2 *произвольные числа, удовлетворяющие условию*

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1/m, \quad 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 1/n,$$

веса

$$A_{ik} = 1/mn \quad (i=1, \ldots, m;\ k=1, \ldots, n) \tag{18}$$

и точную оценку ошибки

$$R_{mn} = \frac{M}{m^r}B_{r,p} + \frac{P}{n^s}B_{s,p} + \frac{Q}{m^r n^s}B_{r,p}B_{s,p}, \tag{19}$$

где

$$B_{j,p} = \frac{1}{j!}\min_c \|B_j(\cdot) - c\|_p.$$

Этот результат непосредственно вытекает из теоремы 2 и работы [8].

Полученные результаты без труда обобщаются на случай функций произвольного числа переменных, а также имеют место и при $q=1, \infty$,

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.
2. Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.
3. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 464 (1969).
4. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.
5. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 90 (1971).
6. Левин М. И., Гиршович Ю. М., Арро В. К., Докл. АН СССР, № 226, 51 (1976).
7. Гиршович Ю. М., Левин М. И., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 393, 21 (1976).
8. Женсыкбаев А. А., Докл. АН СССР, № 227, 227 (1976).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 30/IV 1976

M. LEVIN, J. GIRŠOVITŠ

PERIOODILISTE FUNKTSIOONIDE HULKADE PARIMAD KUBATUURVALEMID

Funktsioonihulkadele $\widetilde{W}_q^{rs}$, mis rahuldavad tingimust (1), on leitud parim valem (2), mille erijuht (16) omab sõlmi (17), kaale (18) ja veahinnangut (19).

M. LEVIN, Y. GIRSHOVICH

OPTIMAL CUBATURE FORMULAE FOR SETS OF PERIODICAL FUNCTIONS

The optimal cubature formula (2) for the sets $\widetilde{W}_q^{rs}$ of functions satisfying (1) is constructed. The optimal formula (16) has knots (17), coefficients (18) and exact error estimation (19).