ЛИТЕРАТУРА

1. Керес Х., ЖЭТФ, **48**, 1319 (1965).
2. Коппель А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 297 (1975).
3. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961, с. 272.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1973, с. 320.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 8/VII 1975

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.17

УДК 518 : 517.392

Б. БОЯНОВ

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ВЕСОМ ДЛЯ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

B. BOJANOV. PARIMAD KAALUGA INTEGREERIMISMEETODID DIFERENTSEERUVATE FUNKTSIOONIDE KLASSIDELE

B. BOYANOV. BEST METHODS OF WEIGHTED INTEGRATION FOR CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Пусть $W_q^{(r)}(M; a, b)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $r = 1, 2 \ldots$ — класс всех функций, заданных на конечном интервале $[a, b]$, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную и r-ю, удовлетворяющую неравенству $\|f^{(r)}\|_q \leqslant M$. Пусть функция $\omega(x)$ суммируема и положительна на $[a, b]$. Рассмотрим задачу о построении наилучшего (т. е. с минимальной оценкой погрешности) метода приближения интеграла $I(f) = \int_a^b \omega(x) f(x)\, dx$ на классе $W_q^{(r)}(M; a, b)$ с помощью информации $\{f^{(k)}(x_i)\}_{k=0}^{r-1}$ в n фиксированных точках $\{x_i\}_1^n : a \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$. Поскольку по лемме С. А. Смоляка [1] (см. также [2]) среди наилучших методов есть линейный, то ограничимся только методами вида

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r-1} A_{ik} f^{(k)}(x_i). \tag{1}$$

Обозначим через π_m множество всех многочленов степени не выше m. Как показал М. И. Левин [3], наилучший метод является точным для многочленов класса π_{r-1}.

Для построения наилучшего метода будем использовать следующую простую идею: сначала построим элементарные наилучшие формулы вида (1) по информации сперва в одном, а затем в обоих концах интервала интегрирования, а потом покажем, что метод, основанный на вычислении каждого из интегралов $\int_a^{x_1}, \int_{x_1}^{x_2}, \ldots, \int_{x_n}^{b}$ элементарным методом (т. н. составной), будет наилучшим.

Теорема 1. *Квадратурная формула Тейлора*

$$\int_a^b \omega(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{r-1} \int_a^b \omega(x)\,((x-\alpha)^k/k!)\,dx f^{(k)}(\alpha),\ a \leqslant \alpha \leqslant b,$$

является наилучшим методом интегрирования на классе $W_q^{(r)}(M; a, b)$ *при информации* $\{f^{(k)}(\alpha)\}_{k=0}^{r-1}$.

Доказательство следует сразу из интерполяционной формулы Тейлора и результата [3].

Обозначим через $\varphi(t)$ функцию

$$\frac{1}{(r-1)!}\int_t^b \omega(x)\,(x-t)^{r-1}\,dx$$

и через $U_p[\varphi, [a, b]; t]$ — многочлен степени $r-1$ наилучшего L_p-приближения функции φ на отрезке $[a, b]$, а также

$$\bar{\varphi}(t) = \varphi(((b-a)/2)\,t + (a+b)/2),\ U_p(t) = U_p[\bar{\varphi}, [-1, 1]; t].$$

Теорема 2. *Квадратурная формула*

$$\int_a^b \omega(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{r-1} (A_k f^{(k)}(a) + B_k f^{(k)}(b)),$$

где

$$A_k = \frac{1}{k!}\int_a^b \omega(x)\frac{(x-a)^k}{k!}\,dx - (-1)^{r-k-1}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{r-k-1} U_p^{(r-k-1)}(-1),$$

$$B_k = (-1)^{r-k-1}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{r-k-1} U_p^{(r-k-1)}(1),$$

является наилучшим методом интегрирования в $W_q^{(r)}(M; a, b)$ *при информации* $\{f^{(k)}(a), f^{(k)}(b)\}_{k=0}^{r-1}$.

Доказательство. Легко видеть, что класс методов интегрирования

$$I(f) \approx \sum_{k=0}^{r-1} \int_a^b \omega(x)\frac{(x-a)^k}{k!}\,dx f^{(k)}(a) + \int_a^b Q(t) f^{(r)}(t)\,dt = S_Q(t), \tag{2}$$

где Q пробегает весь класс π_{r-1}, совпадает с классом всех линейных методов, использующих информацию $\{f^{(k)}(a), f^{(k)}(b)\}_0^{r-1}$ и точных для многочленов степени не выше $r-1$. На основании упомянутого результата М. И. Левина и леммы С. А. Смоляка, наилучший метод интегрирования следует искать среди методов вида (2). Имеем

$$\inf_{Q\in\pi_{r-1}} \sup_{f\in W_q(M; a, b)} |I(f) - S_Q(f)| =$$

$$= \inf_{Q\in\pi_{r-1}} \sup_{f\in W_q^{(r)}(M; a, b)} \left|\int_a^b (\varphi(t) - Q(t)) f^{(r)}(t)\,dt\right| =$$

$$=\{\int_a^b |\varphi(t)-U_p[\varphi,[a,b];t]|^p dt\}^{1/p}M.$$

При этом равенство достигается только для многочлена $Q = U_p[\varphi,[a,b];t]$. Используя (2), вычисляем коэффициенты A_k и B_k наилучшего метода.

Теорема 3. *Пусть* $x_0 = a \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant b = x_{n+1}$. *Составной метод вычисления интеграла* $I(f)$ *при информации* $\{f^{(k)}(x_i)\}_{k=0,\ i=1}^{r-1,\ n}$ *является наилучшим методом на классе* $W_q^{(r)}(M;a,b)$.

Доказательство. Обозначим через e_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ погрешность наилучшего элементарного метода на классе $W_q^{(r)}(1;x_i,x_{i+1})$ при информации соответственно $\{f^{(k)}(x_1)\}_{k=0}^{r-1}$, $\{f^{(k)}(x_i), f^{(k)}(x_{i+1})\}_{k=0}^{r-1}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, $\{f^{(k)}(x_n)\}_{k=0}^{r-1}$. Составной метод имеет на классе $W_q^{(r)}(M;a,b)$ погрешность R, где

$$R\leqslant \sup_{f\in W_q^{(r)}(M;a,b)} \sum_{i=0}^n e_i\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f^{(r)}(t)|^q dt\}^{1/q}.$$

По неравенству Гёльдера получаем $R\leqslant M\{\sum_{i=0}^n e_i^p\}^{1/p}$. Определяем постоянные M_i равенствами

$$M_i = M e_i^{p-1} / \{\sum_{i=0}^n e_i^p\}^{1/q}.$$

Согласно лемме С. А. Смоляка [1], для каждого ε $(0<\varepsilon<1)$ найдется функция $g_i(t)$ из класса $W_q^{(r)}(M_i;x_i,x_{i+1})$ такая, что $g_i^{(k)}(x_i) = g_i^{(k)}(x_{i+1}) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $g_0^{(k)}(x_1) = g_n^{(k)}(x_n) = 0$ для $k = 0, 1, \ldots, r-1$ и $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(t)g_i(t)dt = \varepsilon e_i M_i$. Но функция $g(t)$, совпадающая с $g_i(t)$ в $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, принадлежит классу $W_q^{(r)}(M;a,b)$ и для нее справедливо

$$\int_a^b \omega(x)g(x)dx \geqslant \varepsilon M\{\sum_{i=0}^n e_i^p\}^{1/p}.$$

Следовательно, погрешность R^* наилучшего метода будет удовлетворять неравенству

$$R^* \geqslant \varepsilon M\{\sum_{i=0}^n e_i^p\}^{1/p}.$$

В силу произвольности ε получим $R^* \geqslant R$. Поскольку по определению $R^* \leqslant R$, то $R^* = R$, и теорема доказана.

Отметим, что для $q=\infty$ наилучший метод построен М. И. Левиным [4] при $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$ и информации $\{f^{(k)}(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n,\ k = 0, 1, \ldots, r-1\}$. Построение элементарных методов рассматривалось в [5–7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Смоляк С. А., Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Канд. дисс., М., 1965.
2. Бахвалов Н. С., ЖВМ и МФ., 11, 1014 (1971).
3. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 90 (1971).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 179 (1974).
5. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 12, 44 (1963).
6. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 12, 376 (1963).
7. Левин М., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 222, 14 (1965).

Софийский государственный университет

Поступила в редакцию
8/X 1975

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

УДК 681.327.6

Х. ВАЛЛАСТЕ

ОБ ИЗМЕРЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ЦТМП

H. VALLASTE. ÕHUKESTE SILINDRILISTE MAGNETKILEDE DIFERENTSIAALSE MAGNETILISE VASTUVÕTLIKKUSE UURIMINE

H. VALLASTE. A STUDY OF DIFFERENTIAL MAGNETIC SUSCEPTIBILITY OF PLATED WIRE

Для экспериментального изучения дифференциальной магнитной восприимчивости цилиндрических тонких магнитных пленок (ЦТМП) в зависимости от поля смещения автором была собрана установка, позволяющая записывать на двухкоординатном самописце кривые восприимчивости при квазистатическом перемагничивании пленок по оси легкого намагничивания (ОЛН) или по оси трудного намагничивания (ОТН). Блок-схема установки показана на рис. 1. Источником тока перемагничивания служит специально изготовленный генератор линейно изменяющегося по времени тока с максимальной амплитудой 0,5 *а* и скоростью нарастания тока 1 *а/мин.* Для предварительного насыщения ЦТМП используется отдельный источник импульсов тока с амплитудой до 15 *а* и длительностью 0,2 *сек.* Для получения сигнала, пропорционального дифференциальной восприимчивости ЦТМП, образцы возбуждаются слабым переменным магнитным полем с частотой 175 *кгц* и амплитудой $H_{\sim} < 10^{-3}$ *э.* Допустимое максимальное значение этого поля определяется по исчезновению мнимой (гистерезисной) составляющей восприимчивости. Сигнал с образцов проходит через настроенный дифференциальный предусилитель и селективный вольтметр В6-2, после чего поступает на вход стробирующей приставки С1-21. Последняя запускается от генератора Г3-33, служащего источником тока возбуждения. Выбором момента стробирования можно на выходе приставки получать сигнал, соответствующий действительной или мнимой составляющей восприимчивости. Приставка усовершенствована так, что к ее выходу можно непосредственно подключать канал