EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.16

УДК 530.12 : 531.51

А. КОППЕЛЬ

ОБ УРАВНЕНИЯХ СТАЦИОНАРНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ПОСТ-НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

A. KOPPEL. STATSIONAARSE GRAVITATSIOONIVÄLJA VÕRRANDITEST POST-MITTERELATIVISTLIKUS LÄHENDUSES

A. KOPPEL. ON POST-NONRELATIVISTIC EQUATIONS OF THE STATIONARY GRAVITATIONAL FIELD

В данной работе поставлена цель получить основные уравнения, определяющие стационарное гравитационное поле (СГ-поле) в пост-нерелятивистском приближении, и проанализировать их с учетом возможности существования неньютонова нерелятивистского предела [1]. При этом изучение уравнений движения материальных объектов в таком поле в наши задачи не входит.

1. Будем исходить* из уравнений (1.10)—(1.14) работы [2]. В качестве тензора $T_{\mu\nu}$ принимаем тензор энергии-импульса идеальной жидкости. Тогда на основе формул (2.9)—(2.11) работы [2] величины $\varrho, \vec{j}, \mathbf{S}$ (1.14) получаются в виде

$$\varrho = -4\pi G\mu_0 - \frac{4\pi G}{c^2}\,[\mu_0\{\overset{(2)}{\lambda} + 2\overset{(0)}{\mathrm{k}}(\vec{u}\otimes\vec{u})\} + 3p_0] + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{1}$$

$$\vec{j} = \frac{4\pi G\mu_0}{c^2}[\overset{(1)}{\vec{\omega}} + 2\vec{u}] + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{2}$$

$$\mathbf{S} = -\frac{4\pi G\mu_0}{c^2}\overset{(0)}{\mathrm{k}} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{3}$$

Здесь μ_0 — плотность вещества, p_0 — давление, а $\vec{u}$ — скорость вещества в предельном эвклидовом 3-пространстве $\overset{(0)}{V}_3$. Видим, что полученные разложения имеют члены только с четными степенями $1/c$. Поэтому разложения для основных характеристик СГ-поля принимаем также в виде

$$\lambda = 1 + \frac{\overset{(2)}{\lambda}}{c^2} + \frac{\overset{(4)}{\lambda}}{c^4} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \tag{4}$$

* В данной статье использованы обозначения и определения работы [2].

$$\vec{\sigma} = \frac{\overset{(1)}{\vec{\sigma}}}{c} + \frac{\overset{(3)}{\vec{\sigma}}}{c^3} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \tag{5}$$

$$\mathbf{k} = \overset{(0)}{\mathbf{k}} + \frac{\overset{(2)}{\mathbf{k}}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{6}$$

Для дальнейших вычислений выведем две вспомогательные формулы. Пусть в пространстве $\overline{V}_3$ с метрическим тензором $\mathbf{k}$ существует некоторый вектор $\vec{A}$, причем

$$\vec{A} = \frac{1}{c^n}\left[\overset{(n)}{\vec{A}} + \frac{1}{c^2}\overset{(n+2)}{\vec{A}} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right] \tag{7}$$

(n — нуль или положительное целое число). Тогда для дивергенции и ротора этого вектора получим с учетом (6) следующие выражения:

$$\nabla\vec{A} = \frac{1}{c^n}\Big[\overset{(0)}{\nabla}\overset{(n)}{\vec{A}} + \frac{1}{c^2}\Big\{\overset{(0)}{\nabla}\overset{(n+2)}{\vec{A}} - \frac{1}{2}(\overset{(0)}{k})^{-1}\overset{(2)}{k}\,\overset{(0)}{\nabla}\overset{(n)}{\vec{A}} + \frac{1}{2}\overset{(0)}{\nabla}[(\overset{(0)}{k})^{-1}\overset{(2)}{k}\,\overset{(n)}{\vec{A}}] + \overset{(0)}{\nabla'}\overset{(n)}{\vec{A}}\Big\} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\Big], \tag{8}$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{c^n}\Big[\overset{(0)}{\nabla}\times\overset{(n)}{\vec{A}} + \frac{1}{c^2}\Big\{\overset{(0)}{\nabla}\times\overset{(n+2)}{\vec{A}} - \frac{1}{2}(\overset{(0)}{k})^{-1}\overset{(2)}{k}\,\overset{(0)}{\nabla}\times\overset{(n)}{\vec{A}}\Big\} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\Big]. \tag{9}$$

Здесь $k \equiv \det\|k_{lm}\| = \overset{(0)}{k} + \frac{\overset{(2)}{k}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$, $\overset{(0)}{\nabla}$ — градиентный оператор в эвклидовом пространстве $\overset{(0)}{V}_3$ с метрическим тензором $\overset{(0)}{\mathbf{k}}$, а

$$\overset{(0)}{\nabla'}\overset{(n)}{\vec{A}} \equiv (\overset{(0)}{k})^{-1/2}[(\overset{(0)}{k})^{1/2}\overset{(2)}{k}{}^{sp}\overset{(n)}{A}_p]_{,s}, \tag{10}$$

где $\overset{(2)}{k}{}^{sp} = -\overset{(2)}{k}_{lm}\overset{(0)}{k}{}^{sl}\overset{(0)}{k}{}^{pm}$ и $k_{lm} = \overset{(0)}{k}_{lm} + \frac{\overset{(2)}{k}_{lm}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$.

В силу (1)—(10) уравнения СГ-поля (формулы (1.10)—(1.13) работы [2]) принимают теперь вид

$$\begin{aligned}\overset{(0)}{\nabla}\overset{(0)}{\nabla}\overset{(4)}{\lambda} = {} & \frac{1}{2}(\overset{(0)}{k})^{-1}\overset{(2)}{k}\,\overset{(0)}{\nabla}\overset{(0)}{\nabla}\overset{(2)}{\lambda} - \frac{1}{2}\overset{(0)}{\nabla}[(\overset{(0)}{k})^{-1}\overset{(2)}{k}\,\overset{(0)}{\nabla}\overset{(2)}{\lambda}] - \overset{(0)}{\nabla'}\overset{(0)}{\nabla}\overset{(2)}{\lambda} + \overset{(0)}{\mathbf{k}}(\overset{(0)}{\nabla}\overset{(2)}{\lambda}\otimes\overset{(0)}{\nabla}\overset{(2)}{\lambda}) + \\ & + 2\overset{(2)}{\lambda}\,\overset{(0)}{\nabla}\overset{(0)}{\nabla}(\psi^2) - 4\overset{(0)}{\mathbf{k}}(\overset{(0)}{\nabla}\psi\otimes\overset{(3)}{\vec{\sigma}}) - 4\overset{(2)}{\mathbf{k}}(\overset{(0)}{\nabla}\psi\otimes\overset{(0)}{\nabla}\psi) + \\ & + 8\pi G[2\mu_0\overset{(0)}{\mathbf{k}}(\vec{u}\otimes\vec{u}) + 3p_0],\end{aligned} \tag{11}$$

$$\overset{(0)}{\nabla}\overset{(3)}{\vec{\sigma}} = -\overset{(0)}{\nabla}[(\overset{(0)}{k})^{-1}\overset{(2)}{k}\,\overset{(0)}{\nabla}\psi] - 2\overset{(0)}{\nabla'}\overset{(0)}{\nabla}\psi + 4\overset{(0)}{\mathbf{k}}(\overset{(0)}{\nabla}\psi\otimes\overset{(0)}{\nabla}\overset{(2)}{\lambda}), \tag{12}$$

$$\overset{(0)}{\nabla} \times \overset{(3)}{\vec{\sigma}} = -16\pi G \mu_0 \vec{u}, \tag{13}$$

$$\overset{(2)}{\mathbf{P}} = -2(\overset{(0)}{\nabla}\psi \otimes \overset{(0)}{\nabla}\psi). \tag{14}$$

Здесь выписаны только члены, имеющие такой же порядок малости, как и первые релятивистские поправки величин ϱ, $\vec{j}$ и $\mathbf{S}$. В полученных уравнениях учтены как формула $\overset{(1)}{\vec{\sigma}} = 2\overset{(0)}{\nabla}\psi$, так и уравнения нерелятивистского СГ-поля (3.1)—(3.3) работы [2].

2. Прежде всего отметим существенное следствие, вытекающее из (14). Видим, что в рассматриваемом приближении неньютонов предел вызывает искривление 3-пространства $\overline{V}_3$ (конформное пространство по Фоку [3]). В случае ньютонова предела всегда можно выбрать координатную систему, где $\psi = 0$, и, следовательно, получить $\overset{(2)}{\mathbf{P}} = 0$, т. е. и в пост-нерелятивистском приближении $\overline{V}_3$ остается эвклидовым.

После определения $\overset{(2)}{\mathbf{k}}$ на основе (14) из уравнений (12) и (13) по заданным дивергенции и ротору вычисляется векторное поле $\overset{(3)}{\vec{\sigma}}$. Интересно отметить, что, хотя согласно формуле (13) вихревой характер этого поля определяется движением вещества, в общем случае $\overset{(3)}{\vec{\sigma}}$ не сугубо соленоидальный вектор, так как в силу неисчезающего нерелятивистского вихревого потенциала $\overset{(0)}{\nabla}\overset{(3)}{\vec{\sigma}} \neq 0$. Вне областей, занимаемых источниками, $\mu_0\vec{u} = 0$, и $\overset{(3)}{\vec{\sigma}}$ является градиентным. В этом случае первая релятивистская поправка к нерелятивистскому вихревому потенциалу определяется из уравнения Пуассона (12). Поправка $\overset{(4)}{\lambda}$ к величине $\overset{(2)}{\lambda} = 2(\Phi - \psi^2)$ (Φ — ньютонов потенциал) вычисляется также из уравнения типа Пуассона (11).

3. Будем теперь рассматривать СГ-поле с ньютоновым пределом ($\psi = 0$). Тогда в силу (14) можно полагать $\overset{(2)}{\mathbf{k}} = 0$, а уравнениям (11)—(13) придать соответственно вид

$$\overset{(0)}{\nabla}\overset{(0)}{\nabla}\overset{(4)}{\lambda} = 4\mathbf{k}(\overset{(0)}{\nabla}\Phi \otimes \overset{(0)}{\nabla}\Phi) + 8\pi G[2\mu_0\mathbf{k}(\vec{u} \otimes \vec{u}) + 3p_0], \tag{15}$$

$$\overset{(0)}{\nabla}\overset{(3)}{\vec{\sigma}} = 0, \tag{16}$$

$$\overset{(0)}{\nabla} \times \overset{(3)}{\vec{\sigma}} = -16\pi G \mu_0 \vec{u}. \tag{17}$$

Видим, что уравнения (16) и (17) для $\overset{(3)}{\vec{\sigma}}$ формально совпадают с уравнениями квазистационарного магнитного поля при наличии источников поля. Для сравнения отметим, что градиентный нерелятивистский вектор $\overset{(1)}{\vec{\sigma}}$ (см. формулу (3.5) работы [2]) тоже удовлетворяет уравнениям типа (16) и (17), но с полностью исчезающей правой частью.

Сказанное порождает проблему: можно ли рассматривать неньютонов нерелятивистский предел как некоторый «упрощенный вариант» (с уравнениями без источников для вихревого поля) пост-ньютонова приближения СГ-поля, данного уравнениями (15)—(17)?

Чтобы положительно ответить на поставленный вопрос, мы должны, с одной стороны, толковать $\overset{(3)}{\vec{\sigma}}$ как аналог $\overset{(1)}{\vec{\sigma}}$, а с другой — $\overset{(4)}{\lambda}$ в (15) как аналог определенной поправки к ньютонову потенциалу Φ, имеющей место в неньютоновом пределе. Для областей вне источников ($\mu_0 = p_0 = 0$) вектор $\overset{(3)}{\vec{\sigma}}$ градиентный, как и $\overset{(1)}{\vec{\sigma}}$. Следовательно, для полной аналогии должны бы выполняться равенства

$$\overset{(3)}{\vec{\sigma}} = 2\overset{(0)}{\nabla}\psi, \quad \overset{(4)}{\lambda} = -2(\psi)^2. \tag{18}$$

Но тогда из (15) мы получили бы

$$\overset{(0)}{\mathbf{k}}(\overset{(0)}{\nabla}\psi \otimes \overset{(0)}{\nabla}\psi) + \overset{(0)}{\mathbf{k}}(\overset{(0)}{\nabla}\Phi \otimes \overset{(0)}{\nabla}\Phi) = 0. \tag{19}$$

Однако при реальных непостоянных значениях ψ и Φ это соотношение несостоятельно. Итак, невозможно толковать $\overset{(4)}{\lambda}$ как аналог поправки к ньютонову потенциалу Φ в неньютоновом пределе, т. е. в случае СГ-полей трактовать соотношения для неньютонова предела как просто некие «остатки» соотношений для пост-ньютонова приближения — нельзя. Неньютонов предел релятивистских гравитационных полей, на существование которого впервые указывалось в работе [1], имеет, по-видимому, самостоятельное значение и специфическую сущность.

Отметим еще, что в силу уравнения ньютоновой теории гравитации $\overset{(0)}{\nabla}\overset{(0)}{\nabla}\Phi = 4\pi G\mu_0$ уравнению (15) можно придать также вид

$$\overset{(0)}{\nabla}\overset{(0)}{\nabla}\overset{(2)}{\Phi} = 4\pi G\{2\mu_0[\overset{(0)}{\mathbf{k}}(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \Phi] + 3p_0\}, \tag{20}$$

где

$$\overset{(2)}{\Phi} = \frac{\overset{(4)}{\lambda}}{2} - (\Phi)^2. \tag{21}$$

Сравнение этого результата с формулой (3.4) работы [2] показывает, что наличие вихревого потенциала ψ в выражении для характерного скаляра λ СГ-поля добавляет в случае неньютонова нерелятивистского предела к решению уравнения Пуассона или Лапласа $1 + \frac{2\Phi}{c^2}$ отрицательный член $-\frac{2(\psi^2)}{c^2}$, в то время как в случае поля с ньютоновым пределом в пост-ньютоновом приближении к решению уравнения Пуассона или Лапласа $1 + \frac{2\Phi}{c^2} + \frac{2\overset{(2)}{\Phi}}{c^4}$ прибавляется положительный член $+\frac{2(\Phi)^2}{c^4}$. Следует иметь в виду, что скаляр λ (точнее его квадратный корень) определяет по существу энергию пробной частицы в данном СГ-поле (см. также [4]).

В заключение автор выражает благодарность Х. Кересу за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керес Х., ЖЭТФ, 48, 1319 (1965).
2. Коппель А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, 297 (1975).
3. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961, с. 272.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., 1973, с. 320.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 8/VII 1975

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

УДК 518 : 517.392

Б. БОЯНОВ

НАИЛУЧШИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ВЕСОМ ДЛЯ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

B. BOJANOV. PARIMAD KAALUGA INTEGREERIMISMEETODID DIFERENTSEERUVATE FUNKTSIOONIDE KLASSIDELE

B. BOYANOV. BEST METHODS OF WEIGHTED INTEGRATION FOR CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Пусть $W_q^{(r)}(M; a, b)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $r = 1, 2 \ldots$ — класс всех функций, заданных на конечном интервале $[a, b]$, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную и r-ю, удовлетворяющую неравенству $\|f^{(r)}\|_q \leqslant M$. Пусть функция $\omega(x)$ суммируема и положительна на $[a, b]$. Рассмотрим задачу о построении наилучшего (т. е. с минимальной оценкой погрешности) метода приближения интеграла $I(f) = \int\limits_a^b \omega(x) f(x)\,dx$ на классе $W_q^{(r)}(M; a, b)$ с помощью информации $\{f^{(k)}(x_i)\}_{k=0}^{r-1}$ в n фиксированных точках $\{x_i\}_1^n : a \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$. Поскольку по лемме С. А. Смоляка [1] (см. также [2]) среди наилучших методов есть линейный, то ограничимся только методами вида

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{r-1} A_{ik} f^{(k)}(x_i). \qquad (1)$$

Обозначим через π_m множество всех многочленов степени не выше m. Как показал М. И. Левин [3], наилучший метод является точным для многочленов класса π_{r-1}.

Для построения наилучшего метода будем использовать следующую простую идею: сначала построим элементарные наилучшие формулы вида (1) по информации сперва в одном, а затем в обоих концах интервала интегрирования, а потом покажем, что метод, основанный на вычислении каждого из интегралов $\int\limits_a^{x_1}, \int\limits_{x_1}^{x_2}, \ldots, \int\limits_{x_n}^{b}$ элементарным методом (т. н. составной), будет наилучшим.