

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.
2. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.
3. Levin M., Girshovich Y., ENSV TA Toimet., Füüs. Matem., 24, 264 (1975).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 449 (1972).
5. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 407 (1970).
6. Алхимова В. М., Докл. АН СССР, 204, 263 (1972).
7. Йыги А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 358 (1973).
8. Левин М., Левина М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, 15 (1975).
9. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 249 (1969).

Таллинский политехнический
институт

Поступила в редакцию
10/III 1975

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÕIDE
FÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.15>

УДК 518 : 517.392

Ю. ГИРШОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

1. GIRSOVITS OPTIMAALSED FIKSEERITUD SÕLMEDEGA KVADRATUURVALEMID

Y. GIRSHOVICH. BEST QUADRATURE FORMULAS WITH FIXED KNOTS

Через $W^{(r)}L_q$ (при заданных $M > 0$ и $1 \leq q \leq \infty$) обозначим множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и удовлетворяют условию

$$\|f^{(r)}\|_{L_q(0,1)} \leq M.$$

Пусть задана линейно независимая система функционалов

$$U_i(f) = \sum_{j=0}^{r-1} [\alpha_{ij} f^{(j)}(0) + \beta_{ij} f^{(j)}(1)] \quad (i=1, \dots, s),$$

где $0 \leq s \leq 2r$.

Через $W_U^{(r)}L_q$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$U_i(f) = 0 \quad (i=1, \dots, s). \quad (1)$$

Квадратурную формулу с фиксированными узлами и остатком $R(f)$ будем называть оптимальной [1] на множестве функций H , если ее веса выбраны таким образом, что величина $\sup_{f \in H} |R(f)|$ достигает наименьшего значения. Нас будет интересовать задача построения оптимальной на множестве $W_U^{(r)}L_q$ формулы

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + R_n(f), \quad (2)$$

где узлы $0 \leq x_1 < \dots < x_n \leq 1$ и множества $J_k \subset \{0, 1, \dots, r-1\}$ ($k=1, \dots, n$) — заданы.

Через V_1, \dots, V_{2r-s} обозначим функционалы краевых условий, сопряженных к условиям (1) относительно дифференциального выражения $y^{(r)}$ [2]. Через $K_r(V; x)$ обозначим множество всех моносплайнов с заданными узлами x_1, \dots, x_n вида

$$K(t) = \frac{t^r}{r!} + \sum_{j=0}^{r-1} c_{0,j} t^{r-j-1} + \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} c_{kj} (t - x_k)_+^{r-j-1},$$

удовлетворяющих условиям

$$V_i(K) = 0 \quad (i=1, \dots, 2r-s).$$

Здесь $u_+^j = u^j$ при $u \geq 0$, $u_+^j = 0$ при $u < 0$.

Каждому моносплайну из множества $K_r(V; x)$ можно поставить в соответствие [3] квадратурную формулу (2), где

$$A_{kj} = (-1)^j [K^{(r-j-1)}(x_k - 0) - K^{(r-j-1)}(x_k + 0)] \\ (k=1, \dots, n; j \in J_k),$$

и для функции $f(t) \in W_U^{(r)} L_q$

$$R_n(f) = (-1)^r \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt. \quad (3)$$

Для построения оптимальной на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулы (2) необходимо и достаточно найти моносплайн, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) среди всех моносплайнов из множества $K_r(V; x)$ [3]. Этот моносплайн обозначим через $\bar{K}(t)$. Тогда для оптимальной на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулы (3) справедливо равенство [3]

$$\sup_{f \in W_U^{(r)} L_q} |R_n(f)| = M \|\bar{K}(t)\|_{L_p(0,1)}.$$

Теорема 1. Для того, чтобы моносплайн $\bar{K}(t)$ наименее уклонялся от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p ($1 \leq p < \infty$) среди всех моносплайнов из множества $K_r(V; x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\bar{M}(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\bar{M}^{(r)}(t) = |K(t)|^{p-1} \operatorname{sign} K(t), \quad (4)$$

$$U_i(\bar{M}) = 0 \quad (i=1, \dots, s), \quad (5)$$

$$\bar{M}^{(j)}(x_k) = 0 \quad (k=1, \dots, n; j \in J_k). \quad (6)$$

При выполнении этих условий

$$\int_0^1 |\bar{K}(t)|^p dt = (-1)^r \int_0^1 \bar{M}(t) dt. \quad (7)$$

При $1 < p < \infty$ существует единственный моносплайн $\bar{K}(t)$.

Доказательство. Докажем необходимость условий теоремы. Пусть моносплайн $\bar{K}(t)$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p среди всех моносплайнов из множества $K_r(V; x)$. Через \bar{A}_{kj} ($k=1, \dots, n; j \in J_k$) обозначим веса соответствующей моносплайну $\bar{K}(t)$ оптимальной на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулы (2). Пусть ранг матрицы $\|U_i(x^{k-1})\|_{i=1, k=1}^{s,r}$ равен m . Через $\varphi_{m+1}(t), \dots, \varphi_r(t)$ обозначим базис в пространстве всех многочленов $\varphi(t)$ степени $\leq r-1$, удовле-

творяющих условиям $U_i(\varphi) = 0$ ($i = 1, \dots, s$). Веса \bar{A}_{hj} удовлетворяют условиям [3, 4]

$$\int_0^1 \varphi_l(t) dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} \bar{A}_{hj} \varphi_l^{(j)}(x_k) \quad (l = m+1, \dots, r).$$

Отсюда и из [3] получаем, что для того, чтобы числа A_{kj} ($k = 1, \dots, n$; $j \in J_k$) могли служить весами формулы (2), соответствующей некоторому моносплайну из множества $K_r(V; x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} (\bar{A}_{kj} - A_{kj}) \varphi_l^{(j)}(x_k) = 0 \quad (l = m+1, \dots, r). \quad (8)$$

Из [3] следует также, что существует функция $M_0(t)$, для которой выполнены условия (4), (5). Пусть $K_1(t)$ — произвольный моносплайн из множества $K_r(V; x)$, $A_{kj}^{(1)}$ ($k = 1, \dots, n$; $j \in J_k$) — веса соответствующей ему формулы (2). Из необходимых условий минимума вытекает, что

$$\int_0^1 |K(t)|^{p-1} \operatorname{sign} \bar{K}(t) (\bar{K}(t) - K_1(t)) dt = 0,$$

откуда с помощью (2) — (4) получаем

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} (\bar{A}_{kj} - A_{kj}^{(1)}) M_0^{(j)}(x_k) = 0. \quad (9)$$

Будем искать функцию $\bar{M}(t)$, удовлетворяющую (4) — (6), в виде

$$\bar{M}(t) = M_0(t) + \sum_{l=m+1}^r a_l \varphi_l(t).$$

Тогда числа a_{m+1}, \dots, a_r должны являться решением системы

$$\sum_{l=m+1}^r a_l \varphi_l^{(j)}(x_k) = -M_0^{(j)}(x_k) \quad (k = 1, \dots, n; j \in J_k). \quad (10)$$

Известно, что для разрешимости этой системы необходимо и достаточно [5], чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} M_0^{(j)}(x_k) z_{hj} = 0, \quad (11)$$

где z_{hj} ($k = 1, \dots, n$; $j \in J_k$) — любое решение системы

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j \in J_k} z_{hj} \varphi_l^{(j)}(x_k) = 0 \quad (l = m+1, \dots, r). \quad (12)$$

Но множество решений однородной системы (12) описано в (8), поэтому с учетом (9) получаем, что равенства (11) выполнены. Обозначив через a_{m+1}^*, \dots, a_r^* решение системы (10) и положив

$$\bar{M}(t) = M_0(t) + \sum_{l=m+1}^r a_l^* \varphi_l(t),$$

получим искомую функцию $\bar{M}(t)$. Необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть задана функция $\bar{M}(t)$, удовлетворяющая условиям (4) — (6), где $K(t)$ — некоторый моносплайн из множества $K_r(V; x)$, $R_n(f)$ — ошибка соответствующей ему

формулы (2). Покажем, что моносплайн $K(t)$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p среди всех моносплайнов из множества $K_r(V; x)$. Пусть $K_2(t)$ — произвольный моносплайн из $K_r(V; x)$, $R_n^{(2)}(f)$ — ошибка соответствующей ему формулы (2). Тогда из (2) и (6) следует, что

$$\int_0^1 \bar{M}(t) dt = R_n(\bar{M}) = R_n^{(2)}(\bar{M}),$$

откуда с помощью (3) и (4) получаем (7), а также равенство

$$\int_0^1 |K(t)|^p dt = \int_0^1 |K'(t)|^{p-1} \operatorname{sign} K(t) K_2(t) dt.$$

Применив к правой части его неравенство Гёльдера, получим, что

$$\|K(t)\|_{L_p(0,1)} \leq \|K_2(t)\|_{L_p(0,1)},$$

чем и доказывается достаточность условий теоремы. Из последнего неравенства и строгой выпуклости пространств L_p при $1 < p < \infty$ следует также единственность моносплайна $\bar{K}(t)$, наименее уклоняющегося от нуля. Теорема доказана.

Полученная теорема обобщает работы [6–8], из нее следуют также результаты [9]. Полученный результат распространяется и на квадратурные формулы с весовой функцией.

Обозначим через $\bar{W}^{(r)}L_q$ множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) \quad (j=0, \dots, r-1).$$

С помощью теоремы 1 легко получается следующая

Теорема 2. *Оптимальная на множестве $\bar{W}^{(r)}L_q$ формула*

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} A_k f\left(\frac{k}{n}\right) + R_n(f)$$

имеет веса

$$A_k = 1/n \quad (k=0, \dots, n-1)$$

и точную оценку ошибки, равную

$$\sup_{f \in \bar{W}^{(r)}L_q} |R_n(f)| = \frac{1}{n^r \cdot r!} \min_c \|B_r(t) + c\|_{L_p(0,1)},$$

где $B_r(t)$ — многочлен Бернулли. При $1 < q < \infty$ оптимальная формула единственна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sard A., Amer. J. Math., LXXI, 80–91 (1949).
2. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.
3. Levin M., Girshovich Y., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 24, 264 (1975).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 90 (1971).
5. Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.
6. Schoenberg I. J., SIAM J. Numer. Anal., 2, 144–170 (1965).
7. Schoenberg I. J., SIAM J. Numer. Anal., 3, 321–328 (1966).
8. Karlin S., J. Approxim. Theory, 4, 59–90 (1971).
9. Micchelli C. A., J. Math. Anal., Appl., 47, 232–249 (1974).