ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.
2. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.
3. Levin M., Girshovich Y., ENSV TA Toimet., Füüs. Matem., **24**, 264 (1975).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 449 (1972).
5. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 407 (1970).
6. Алхимова В. М., Докл. АН СССР, **204**, 263 (1972).
7. Йыги А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 358 (1973).
8. Левин М., Левина М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 15 (1975).
9. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 249 (1969).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 10/III 1975

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

УДК 518 : 517.392

Ю. ГИРШОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

I. GIRSOVITS. OPTIMAALSED FIKSEERITUD SÕLMEDEGA KVADRATUURVALEMID

Y. GIRSHOVICH. BEST QUADRATURE FORMULAS WITH FIXED KNOTS

Через $W^{(r)}L_q$ (при заданных $M>0$ и $1\leqslant q\leqslant\infty$) обозначим множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и удовлетворяют условию

$$\|f^{(r)}\|_{L_q(0,1)}\leqslant M.$$

Пусть задана линейно независимая система функционалов

$$U_i(f)=\sum_{j=0}^{r-1}[\alpha_{ij}f^{(j)}(0)+\beta_{ij}f^{(j)}(1)] \quad (i=1, \ldots, s),$$

где $0\leqslant s\leqslant 2r$.

Через $W_U^{(r)}L_q$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$U_i(f)=0 \quad (i=1, \ldots, s). \tag{1}$$

Квадратурную формулу с фиксированными узлами и остатком $R(f)$ будем называть оптимальной [1] на множестве функций H, если ее веса выбраны таким образом, что величина $\sup\limits_{f\in H}|R(f)|$ достигает наименьшего значения. Нас будет интересовать задача построения оптимальной на множестве $W_U^{(r)}L_q$ формулы

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in J_k}A_{kj}f^{(j)}(x_k)+R_n(f), \tag{2}$$

где узлы $0\leqslant x_1<\ldots<x_n\leqslant 1$ и множества $J_k\subset\{0, 1, \ldots, r-1\}$ $(k=1, \ldots, n)$ — заданы.

Через $V_1, \ldots, V_{2r-s}$ обозначим функционалы краевых условий, сопряженных к условиям (1) относительно дифференциального выражения $y^{(r)}$ [2]. Через $K_r(V; x)$ обозначим множество всех моносплайнов с заданными узлами $x_1, \ldots, x_n$ вида

$$K(t)=\frac{t^r}{r!}+\sum_{j=0}^{r-1} c_{0,j} t^{r-j-1}+\sum_{k=1}^{n} \sum_{j \in J_k} c_{kj}(t-x_k)_+^{r-j-1},$$

удовлетворяющих условиям

$$V_i(K)=0 \quad (i=1, \ldots, 2r-s).$$

Здесь $u_+^j=u^j$ при $u \geqslant 0$, $u_+^j=0$ при $u<0$.

Каждому моносплайну из множества $K_r(V; x)$ можно поставить в соответствие [3] квадратурную формулу (2), где

$$A_{kj}=(-1)^j[K^{(r-j-1)}(x_k-0)-K^{(r-j-1)}(x_k+0)]$$
$$(k=1, \ldots, n;\ j \in J_k),$$

и для функции $f(t) \in W_U^{(r)} L_q$

$$R_n(f)=(-1)^r \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t)\, dt. \tag{3}$$

Для построения оптимальной на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулы (2) необходимо и достаточно найти моносплайн, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[0,1]$ в метрике L_p $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ среди всех моносплайнов из множества $K_r(V; x)$ [3]. Этот моносплайн обозначим через $\bar{K}(t)$. Тогда для оптимальной на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулы (3) справедливо равенство [3]

$$\sup_{f \in W_U^{(r)} L_q} |R_n(f)|=M\|\bar{K}(t)\|_{L_p(0,1)}.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы моносплайн $\bar{K}(t)$ наименее уклонялся от нуля на отрезке* $[0,1]$ *в метрике* L_p $(1 \leqslant p<\infty)$ *среди всех моносплайнов из множества* $K_r(V; x)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\bar{M}(t)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\bar{M}^{(r)}(t)=|K(t)|^{p-1} \operatorname{sign} K(t), \tag{4}$$

$$U_i(\bar{M})=0 \quad (i=1, \ldots, s), \tag{5}$$

$$\bar{M}^{(j)}(x_k)=0 \quad (k=1, \ldots, n;\ j \in J_k). \tag{6}$$

При выполнении этих условий

$$\int_0^1|\bar{K}(t)|^p dt=(-1)^r \int_0^1 \bar{M}(t)\, dt. \tag{7}$$

При $1<p<\infty$ *существует единственный моносплайн* $\bar{K}(t)$.

Доказательство. Докажем необходимость условий теоремы. Пусть моносплайн $\bar{K}(t)$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[0,1]$ в метрике L_p среди всех моносплайнов из множества $K_r(V; x)$. Через $\bar{A}_{kj}$ $(k=1, \ldots, n;\ j \in J_k)$ обозначим веса соответствующей моносплайну $\bar{K}(t)$ оптимальной на множестве $W_U^{(r)} L_q$ формулы (2). Пусть ранг матрицы $\|U_i(x^{k-1})\|_{i=1, k=1}^{s, r}$ равен m. Через $\varphi_{m+1}(t), \ldots, \varphi_r(t)$ обозначим базис в пространстве всех многочленов $\varphi(t)$ степени $\leqslant r-1$, удовлетворяющих условиям $U_i(\varphi)=0$ $(i=1, \ldots, s)$. Веса $\bar{A}_{kj}$ удовлетворяют условиям [3, 4]

$$\int_0^1 \varphi_l(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in J_k}\bar{A}_{kj}\varphi_l^{(j)}(x_k) \qquad (l=m+1, \ldots, r).$$

Отсюда и из [3] получаем, что для того, чтобы числа A_{kj} $(k=1, \ldots, n;$ $j\in J_k)$ могли служить весами формулы (2), соответствующей некоторому моносплайну из множества $K_r(V;x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in J_k}(\bar{A}_{kj}-A_{kj})\varphi_l^{(j)}(x_k)=0 \qquad (l=m+1, \ldots, r). \tag{8}$$

Из [3] следует также, что существует функция $M_0(t)$, для которой выполнены условия (4), (5). Пусть $K_1(t)$ — произвольный моносплайн из множества $K_r(V;x)$, $A_{kj}^{(1)}$ $(k=1, \ldots, n;$ $j\in J_k)$ — веса соответствующей ему формулы (2). Из необходимых условий минимума вытекает, что

$$\int_0^1 |K(t)|^{p-1}\operatorname{sign}\bar{K}(t)\,(\bar{K}(t)-K_1(t))\,dt=0,$$

откуда с помощью (2)—(4) получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in J_k}(\bar{A}_{kj}-A_{kj}^{(1)})M_0^{(j)}(x_k)=0. \tag{9}$$

Будем искать функцию $\bar{M}(t)$, удовлетворяющую (4)—(6), в виде

$$\bar{M}(t)=M_0(t)+\sum_{l=m+1}^{r}a_l\varphi_l(t).$$

Тогда числа $a_{m+1}, \ldots, a_r$ должны являться решением системы

$$\sum_{l=m+1}^{r}a_l\varphi_l^{(j)}(x_k)=-M_0^{(j)}(x_k) \qquad (k=1, \ldots, n;\ j\in J_k). \tag{10}$$

Известно, что для разрешимости этой системы необходимо и достаточно [5], чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in J_k}M_0^{(j)}(x_k)z_{kj}=0, \tag{11}$$

где z_{kj} $(k=1, \ldots, n;$ $j\in J_k)$ — любое решение системы

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in J_k}z_{kj}\varphi_l^{(j)}(x_k)=0 \qquad (l=m+1, \ldots, r). \tag{12}$$

Но множество решений однородной системы (12) описано в (8), поэтому с учетом (9) получаем, что равенства (11) выполнены. Обозначив через $a_{m+1}^*, \ldots, a_r^*$ решение системы (10) и положив

$$\bar{M}(t)=M_0(t)+\sum_{l=m+1}^{r}a_l^*\varphi_l(t),$$

получим искомую функцию $\bar{M}(t)$. Необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность условий теоремы. Пусть задана функция $\bar{M}(t)$, удовлетворяющая условиям (4)—(6), где $K(t)$ — некоторый моносплайн из множества $K_r(V;x)$, $R_n(f)$ — ошибка соответствующей ему формулы (2). Покажем, что моносплайн $\bar{K}(t)$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[0,1]$ в метрике L_p среди всех моносплайнов из множества $K_r(V;x)$. Пусть $K_2(t)$ — произвольный моносплайн из $K_r(V;x)$, $R_n^{(2)}(f)$ — ошибка соответствующей ему формулы (2). Тогда из (2) и (6) следует, что

$$\int_0^1 \bar{M}(t)\,dt = R_n(\bar{M}) = R_n^{(2)}(\bar{M}),$$

откуда с помощью (3) и (4) получаем (7), а также равенство

$$\int_0^1 |\bar{K}(t)|^p dt = \int_0^1 |\bar{K}(t)|^{p-1}\operatorname{sign}\bar{K}(t)K_2(t)\,dt.$$

Применив к правой части его неравенство Гёльдера, получим, что

$$\|\bar{K}(t)\|_{L_p(0,1)} \leqslant \|K_2(t)\|_{L_p(0,1)},$$

чем и доказывается достаточность условий теоремы. Из последнего неравенства и строгой выпуклости пространств L_p при $1 < p < \infty$ следует также единственность моносплайна $\bar{K}(t)$, наименее уклоняющегося от нуля. Теорема доказана.

Полученная теорема обобщает работы [6–8], из нее следуют также результаты [9]. Полученный результат распространяется и на квадратурные формулы с весовой функцией.

Обозначим через $\tilde{W}^{(r)}L_q$ множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) \quad (j=0,\ \ldots,\ r-1).$$

С помощью теоремы 1 легко получается следующая

Теорема 2. *Оптимальная на множестве $\tilde{W}^{(r)}L_q$ формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} A_k f\left(\frac{k}{n}\right) + R_n(f)$$

имеет веса

$$A_k = 1/n \quad (k=0,\ \ldots,\ n-1)$$

и точную оценку ошибки, равную

$$\sup_{f\in\tilde{W}^{(r)}L_q} |R_n(f)| = \frac{1}{n^r\cdot r!}\min_c \|B_r(t)+c\|_{L_p(0,1)},$$

где $B_r(t)$ — многочлен Бернулли. При $1 < q < \infty$ оптимальная формула единственна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sard A., Amer. J. Math., **LXXI**, 80—91 (1949).
2. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.
3. Levin M., Girshovich Y., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 264 (1975).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 90 (1971).
5. Крейн С. Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.
6. Schoenberg I. J., SIAM J. Numer. Anal., **2**, 144—170 (1965).
7. Schoenberg I. J., SIAM J. Numer. Anal., **3**, 321—328 (1966).
8. Karlin S., J. Approxim. Theory, **4**, 59—90 (1971).
9. Micchelli C. A., J. Math. Anal., Appl., **47**, 232—249 (1974).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 6/X 1975