EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.14

УДК 518 : 517.392

Ю. ГИРШОВИЧ

ОДИН МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ТИПА МАРКОВА

J. GIRSOVITS. PARIMATE MARKOVI TÜÜPI KVADRATUURVALEMITE TULETAMISE MEETOD

Y. GIRSHOVICH. METHOD OF CONSTRUCTION OF MARKOV'S TYPE OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS

Пусть $W^{(r)}L_q$ обозначает множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и удовлетворяют условию $\|f^{(r)}\|_{L_q(0,1)} \leqslant M$ ($M>0$ и q ($1 \leqslant q \leqslant \infty$) — заданные числа).

Функционалы

$$U_i(f)=\sum_{j=0}^{r-1}\left[\alpha_{ij}f^{(j)}(0)+\beta_{ij}f^{(j)}(1)\right] \quad (i=1, \ldots, 2r),$$

где α_{ij}, β_{ij} — заданные числа, считаем линейно независимыми.

Через $\overline{W}_U^{(r)}L_q$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$U_i(f)=0 \quad (i=1, \ldots, m), \tag{1}$$

где m ($0 \leqslant m \leqslant 2r$) — заданное число. При $m=0$ это множество совпадает с $W^{(r)}L_q$.

Рассмотрим на множестве $\overline{W}_U^{(r)}L_q$ квадратурные формулы вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\rho_k}B_{kj}f^{(j)}(u_k)+\sum_{i=m+1}^{s}b_iU_i(f)+\overline{R}_n(f), \tag{2}$$

где $0<u_1<\ldots<u_n<1$, а числа n, s ($m \leqslant s \leqslant 2r$), ρ_k ($0 \leqslant \rho_k \leqslant r-1$) заданы. Формулы (2) назовем формулами типа Маркова.

Нас будет интересовать построение наилучшей [1] на множестве $\overline{W}_U^{(r)}L_q$ формулы (2), т. е. той формулы (2), для которой величина

$$\overline{R}_n=\sup_{f\in\overline{W}_U^{(r)}L_q}\left|\overline{R}_n(f)\right|$$

принимает наименьшее значение.

Через $\mathring{W}_U^{(r)} L_q$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $\overline{W}_U^{(r)} L_q$ и удовлетворяют условиям

$$U_i(f)=0 \quad (i=m+1, \ldots, s).$$

Через $V_1, \ldots, V_{2r}$ обозначим функционалы краевых условий, сопряженных к условиям (1) относительно дифференциального выражения $y^{(r)}$ [2], а через $K_{r,\rho}(V)$ — множество всех моносплайнов $K(x)$ вида

$$K(x)=\frac{x^r}{r!}+\sum_{j=0}^{r-1} c_{0,j} x^{r-j-1}+\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\rho_k} c_{kj}(x-x_k)_+^{r-j-1} \tag{3}$$

(где $u_+^j=u^j$ при $u \geqslant 0$, $u_+^j=0$ при $u<0$), удовлетворяющих условиям

$$V_i(K)=0 \quad (i=1, \ldots, 2r-s).$$

В [3] доказано, что наилучшая на множестве $\mathring{W}_U^{(r)} L_q$ квадратурная формула вида

$$\int_0^1 f(x)\, dx=\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\rho_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k)+R_n(f) \tag{4}$$

однозначно определяется через моносплайн $K^*(x)$ наименьшего уклонения от нуля на отрезке $[0,1]$ в метрике $L_p(p^{-1}+q^{-1}=1)$ среди всех моносплайнов из множества $K_{r,\rho}(V)$, при этом

$$\begin{gathered} A_{kj}=(-1)^j[K^{*(r-j-1)}(x_k-0)-K^{*(r-j-1)}(x_k+0)] \\ (j=0, \ldots, \varrho_k;\ k=1, \ldots, n), \\ R_n=\sup_{f \in \mathring{W}_U^{(r)} L_q} |R_n(f)|=M\, \|K^*(x)\|_{L_p(0,1)}, \end{gathered} \tag{5}$$

где x_k — узлы, A_{kj} — веса, R_n — точная оценка ошибки наилучшей на множестве $\mathring{W}_U^{(r)} L_q$ формулы (4).

Теорема 1. *Для того чтобы формула* (2) *с узлами* u_k $(k=1, \ldots, n)$, *весами* B_{kj} $(j=0, \ldots, \varrho_k;\ k=1, \ldots, n)$, b_i $(i=m+1, \ldots, s)$, *точной оценкой ошибки* $\overline{R}_n$ *была наилучшей на множестве* $\overline{W}_U^{(r)} L_q$, *необходимо и достаточно, чтобы формула* (4) *с узлами* $x_k=u_k$, *весами* $A_{kj}=B_{kj}$, *точной оценкой ошибки* R_n *была наилучшей на множестве* $\mathring{W}_U^{(r)} L_q$, *а веса* b_i *вычислялись по формуле*

$$b_i=V_{2r+1-i}(K^*) \quad (i=m+1, \ldots, s),$$

где $K^*(x)$ *— соответствующий этой формуле моносплайн из* $K_{r,\rho}(V)$. *При этом* $R_n=\overline{R}_n$.

Доказательство. 1. Пусть формула (4) с узлами $x_k (k=1, \ldots, n)$ и весами A_{kj} $(j=0, \ldots, \varrho_k;\ k=1, \ldots, n)$ — наилучшая на множестве $\mathring{W}_U^{(r)} L_q$, R_n — точная оценка ее ошибки, $K^*(x)$ — соответствующий моносплайн из $K_{r,\rho}(V)$. В силу включения $\mathring{W}_U^{(r)} L_q \subset \overline{W}_U^{(r)} L_q$, а также того, что сужение на множество $\mathring{W}_U^{(r)} L_q$ любой формулы (2) совпадает с некоторой формулой (4), для любой формулы (2), в том числе и для наилучшей, справедливо неравенство

$$R_n \leqslant \overline{R}_n. \tag{6}$$

Интегрируя по частям, для любой функции $f(x)\in\overline{W}_U^{(r)}L_q$ (полагая $x_0=1-x_{n+1}=0$), имеем [2]

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)K^*(x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j f^{(j)}(x_k)\left[K^{*(r-j-1)}(x_k-0)-K^{*(r-j-1)}(x_k+0)\right]+ \tag{7}$$

$$+\sum_{i=1}^{2r}U_i(f)\,V_{2r+1-i}(K^*)+(-1)^r\int_0^1 f^{(r)}(x)K^*(x)\,dx.$$

Если учесть, что

$K^{*(r-j-1)}(x_k-0)=K^{*(r-j-1)}(x_k+0)\quad (j=\varrho_k+1,\ldots,r-1;\ k=1,\ldots,n),$

$U_i(f)=0\quad (i=1,\ldots,m),$

$V_i(K^*)=0\quad (i=1,\ldots,s),$

и положить в (7)

$u_k=x_k\quad (k=1,\ldots,n),$

$$B_{kj}=(-1)^j\left[K^{*(r-j-1)}(x_k-0)-K^{*(r-j-1)}(x_k+0)\right]$$
$$(j=0,\ldots,\varrho_k;\ k=1,\ldots,n), \tag{8}$$

$b_i=V_{2r+1-i}(K^*)\quad (i=m+1,\ldots,s),$

$$\overline{R}_n(f)=(-1)^r\int_0^1 f^{(r)}(x)K^*(x)\,dx,$$

то получим формулу (2), для которой, в силу неравенства Гёльдера,

$$\overline{R}_n\leqslant M\,\|K^*(x)\|_{L_p(0,1)}=R_n. \tag{9}$$

Из (6) и (9) следует, что построенная формула (2) является наилучшей на множестве $\overline{W}_U^{(r)}L_q$, причем ((5) и (8))

$$u_k=x_k\quad (k=1,\ldots,n),$$
$$B_{kj}=A_{kj}\quad (j=0,\ldots,\varrho_k;\ k=1,\ldots,n).$$

2. Пусть задана наилучшая на множестве $\overline{W}_U^{(r)}L_q$ формула (2) с точной оценкой ошибки $\overline{R}_n$. Если оценка ошибки наилучшей на множестве $W_U^{(r)}L_q$ формулы (4) R_n удовлетворяет неравенству $R_n<\overline{R}_n$, то, согласно уже доказанной первой части теоремы, можно построить формулу (2), точная оценка ошибки которой на множестве $\overline{W}_U^{(r)}L_q$ есть R_n, что противоречит предположению. В то же время, положив в (4)

$$x_k=u_k\quad (k=1,\ldots,n),$$
$$A_{kj}=B_{kj}\quad (j=0,\ldots,\varrho_k;\ k=1,\ldots,n),$$

где u_k — узлы, B_{kj} — веса заданной наилучшей на множестве $\overline{W}_u^{(r)}L_q$ формулы (2), получим формулу (4), точная оценка ошибки которой есть $\overline{R}_n$. Эта формула (4) и является наилучшей на множестве $W_U^{(r)}L_q$, что доказывает теорему.

Следствие. Для построения наилучшей на множестве $\overline{W}_U^{(r)}L_q$ формулы (2) достаточно найти моносплайн наименьшего уклонения от нуля на отрезке $[0,1]$ в метрике L_p среди всех моносплайнов из $K_{r,\varrho}(V)$, а затем воспользоваться (8).

Примечание. Доказанная теорема обобщает результат работы [4].

Рассмотрим один частный случай. Пусть J_0, $J_1 \subseteq \{0, \ldots, r-1\}$, r — четное. На множестве $W^{(r)}L_q$ найдем наилучшую формулу вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-2} B_{kj} f^{(j)}(u_k) + \sum_{j\in J_0} b_j f^{(j)}(0) + \sum_{j\in J_1} c_j f^{(j)}(0) + \bar{R}_n(f). \qquad (10)$$

Пусть $R_{r,p}(x)$ — многочлен наименьшего уклонения от нуля на отрезке $[-1, 1]$ в метрике L_p среди всех многочленов степени r со старшим коэффициентом, равным 1. При $J \subseteq \{0, \ldots, r-1\}$ через $T_{J,r,p}(x)$ обозначим многочлен наименьшего уклонения от нуля на отрезке $[0, 1]$ в метрике L_p среди всех многочленов степени r со старшим коэффициентом, равным 1, и удовлетворяющих условиям

$$T^{(j)}(0) = 0 \qquad (j \in J).$$

Обозначим

$$J_i^c = \{j : j \in \{0, \ldots, r-1\},\ r-j-1 \notin J_i\} \qquad (i = 0, 1).$$

Из теоремы 1 и теоремы 7 из [3] следует

Теорема 2. *Единственной наилучшей на множестве* $W^{(r)}L_q$ *формулой* (10) *является формула с узлами*

$$u_k = [\delta_0 + 2(k-1)]h \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

где

$$h = 1/[2(n-1) + \delta_0 + \delta_1],$$

$$\delta_0 = [R_{r,p}(1)/T_{J_0^c,r,p}(1)]^{\frac{1}{r}}, \qquad \delta_1 = [R_{r,p}(1)/T_{J_1^c,r,p}(1)]^{\frac{1}{r}},$$

и весами

$$B_{1j} = \frac{1}{r!}[R_{r,p}^{(r-j-1)}(1)h^{j+1} + (-1)^j T_{J_0^c,r,p}(1)\,u_1^{j+1}],$$

$$B_{kj} = \frac{1}{r!}R_{r,p}^{(r-j-1)}(1)h^{j+1}[1 + (-1)^j] \qquad (k = 2, \ldots, n-1),$$

$$B_{nj} = \frac{1}{r!}[T_{J_1^c,r,p}^{(r-j-1)}(1)(1-u_n)^{j+1} + (-1)^j R_{r,p}^{(r-j-1)}(1)h^{j+1}]$$

$$(j = 0, \ldots, r-2),$$

$$b_j = \frac{(-1)^{j+1}}{r!}u_1^{j+1} T_{J_0^c,r,p}^{(r-j-1)}(0) \qquad (j \in J_0),$$

$$c_j = -\frac{1}{r!}(1-u_n)^{j+1} T_{J_1^c,r,p}^{(r-j-1)}(0) \qquad (j \in J_1).$$

Точная оценка ошибки этой формулы есть

$$\bar{R}_n = \frac{M h^r R_{r,p}(1)}{r!\,(rp+1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Эта теорема обобщает некоторые результаты работ [3, 5–8].

Примечание. Впервые наилучшие на множествах функций квадратурные формулы Маркова были рассмотрены в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.
2. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.
3. Levin M., Girshovich Y., ENSV TA Toimet., Füüs. Matem., **24**, 264 (1975).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 449 (1972).
5. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 407 (1970).
6. Алхимова В. М., Докл. АН СССР, **204**, 263 (1972).
7. Йыги А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 358 (1973).
8. Левин М., Левина М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 15 (1975).
9. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 249 (1969).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 10/III 1975

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

УДК 518 : 517.392

Ю. ГИРШОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

I. GIRSOVITS. OPTIMAALSED FIKSEERITUD SÕLMEDEGA KVADRATUURVALEMID

Y. GIRSHOVICH. BEST QUADRATURE FORMULAS WITH FIXED KNOTS

Через $W^{(r)}L_q$ (при заданных $M>0$ и $1\leqslant q\leqslant\infty$) обозначим множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и удовлетворяют условию

$$\|f^{(r)}\|_{L_q(0,1)}\leqslant M.$$

Пусть задана линейно независимая система функционалов

$$U_i(f)=\sum_{j=0}^{r-1}[\alpha_{ij}f^{(j)}(0)+\beta_{ij}f^{(j)}(1)]\qquad(i=1,\ \ldots,\ s),$$

где $0\leqslant s\leqslant 2r$.

Через $W_U^{(r)}L_q$ обозначим множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_q$ и удовлетворяют условиям

$$U_i(f)=0\qquad(i=1,\ \ldots,\ s).\tag{1}$$

Квадратурную формулу с фиксированными узлами и остатком $R(f)$ будем называть оптимальной [1] на множестве функций H, если ее веса выбраны таким образом, что величина $\sup\limits_{f\in H}|R(f)|$ достигает наименьшего значения. Нас будет интересовать задача построения оптимальной на множестве $W_U^{(r)}L_q$ формулы

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in J_k}A_{kj}f^{(j)}(x_k)+R_n(f),\tag{2}$$

где узлы $0\leqslant x_1<\ldots<x_n\leqslant 1$ и множества $J_k\subset\{0,\ 1,\ \ldots,\ r-1\}$ $(k=1,\ \ldots,\ n)$ — заданы.