EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

УДК 535.345.1

Л. СОССИ

К ТЕОРИИ СИНТЕЗА МНОГОСЛОЙНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВЕТОФИЛЬТРОВ

Обобщен и дополнен предложенный в [1] метод синтеза многослойных диэлектрических светофильтров.

Введение

В статье [1] был развит новый метод синтеза многослойных диэлектрических светофильтров. Его существо заключается в нахождении с помощью преобразования Фурье такого непрерывного распределения показателя преломления в слое, при котором слой имеет заданную спектральную кривую пропускания. Затем непрерывный показатель преломления аппроксимируется системой дискретных слоев с такими толщинами и показателями преломления, чтобы ступенчатая кривая возможно точно имитировала непрерывную кривую. Там же было отмечено, что метод допускает в одной и той же задаче синтеза большое количество различных вариантов решения. Эту свободу можно использовать в целях подбора наиболее целесообразных (с точки зрения технологии) значений искомых показателей преломления слоев. В настоящей статье рассмотрим тот же метод в более общем виде и дополним его некоторыми новыми подходами, частично реализующими указанную свободу.

Спектральная характеристика

В основе нашего метода лежат выведенные в [2] формулы для амплитудных коэффициентов отражения r и пропускания t неоднородного слоя. Эти формулы имеют вид бесконечных рядов

$$\begin{aligned} \frac{r}{t}\exp\left(\frac{ikx}{2}\right) &= a_1+a_3+a_5+\ldots, \\ \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{ikx}{2}\right) &= 1+a_2+a_4+\ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где k — волновое число, x — удвоенный оптический путь света:

$$x=2\int_0^z n(u)\,du, \tag{2}$$

взятый от нижней границы $z=0$ слоя; z — геометрическая координата,

n — показатель преломления. Свет падает в отрицательном направлении оси z на верхнюю границу слоя, которая может лежать при любом значении z. Члены разложений выражаются в виде интегралов

$$a_{2l+1}=\int_0^x da(x_1)\int_0^{x_1} da^*(x_2)\ldots\int_0^{x_{2l}} da(x_{2l+1}), \qquad (3)$$

$$a_{2l}=\int_0^x da^*(x_1)\int_0^{x_1} da(x_2)\ldots\int_0^{x_{2l-1}} da(x_{2l}), \qquad (4)$$

где

$$a\equiv a_1=\int_0^x \nu(x)\exp(ikx)\,dx \qquad (5)$$

и

$$\nu(x)=\frac{dn}{dx}\frac{1}{2n}. \qquad (6)$$

Интеграл в формуле (5) имеет вид интеграла Фурье. Обратив его, мы выразим функцию $\nu(x)$ через $a(k)$. Но $a(k)$ можно приближенно связать с заданной спектральной кривой пропускания $T(k)$. Так, в [2] было принято

$$aa^*\approx\frac{1}{2}(T^{-1}-T). \qquad (7)$$

Однако это не единственно возможный и, вероятно, не лучший выбор. Покажем, что при том же порядке точности в правой части равенства (7) может стоять иная функция от T, причем возможных вариантов неограниченно много.

Прежде всего выведем соотношения, связывающие члены разложений (1). Они вытекают из энергетического соотношения

$$\frac{1}{tt^*}-\frac{rr^*}{tt^*}=1, \qquad (8)$$

где $tt^{**}=T$ и $rr^{**}=R$ — энергетические коэффициенты пропускания и отражения. Подставляя сюда разложения (1) и приравнивая члены с одинаковой кратностью интегралов, находим

$$\sum_{m=0}^{l} a_{2m}\overset{*}{a}_{2l-2m}=\sum_{m=1}^{l} a_{2m-1}\overset{*}{a}_{2l-2m+1}, \qquad (9)$$

где $a_0=1$ и $l=1, 2, \ldots$ Те же соотношения вытекают из того, что при $x=0$ они, в силу формул (3)—(5), тривиально выполняются, а производные обеих частей равенств (9) тождественно равны; последнее следует из формул

$$\frac{da_{2l+1}}{dx}=a_{2l}\frac{da}{dx},$$

$$\frac{da_{2l}}{dx}=a_{2l-1}\frac{da^*}{dx}. \qquad (10)$$

Используя теперь соотношения (9), выразим коэффициент пропускания в виде ряда

$$T=1-aa^*-(A_4-(aa^*)^2)+\ldots, \qquad (11)$$

где временно обозначено

$$A_4=aa_3^*+a^*a_3. \qquad (12)$$

Далее, пусть $S[k, T(k)]$ есть некоторая, пока произвольная функция, зависящая от k отчасти прямо и отчасти через заданную функцию $T(k)$. Разлагая S в ряд Тейлора вблизи значения $T=1$, с учетом (11) находим

$$S(k, T) = S(k, 1) - aa^* \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{T=1} - \\ - \left[(A_4 - (aa^*)^2) \left(\frac{dS}{dT} \right)_{T=1} - \frac{(aa^*)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial T^2} \right)_{T=1} \right] + \ldots \quad (13)$$

Потребуем далее, чтобы

$$S(k, 1) = 0, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{T=1} = -1. \quad (14)$$

Тогда

$$S(k, T) = aa^* + \left[A_4 - (aa^*)^2 + \frac{(aa^*)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial T^2} \right)_{T=1} \right] + \ldots \quad (15)$$

Если ограничимся здесь первым членом разложения (т. е. членом второго порядка), то

$$aa^* \approx S[k, T(k)]. \quad (16)$$

Таким образом, в пренебрежении членами четвертого и высших порядков любую функцию $S[k, T(k)]$, удовлетворяющую условиям (14), можно положить равной aa^*. Точность этого приближения определяется в основном членом четвертого порядка, зависящим, согласно (15), от второй производной $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial T^2} \right)_{T=1}$. Целесообразно выбирать $S[k, T(k)]$ так, чтобы этот член был в среднем по спектру возможно мал. Однако наперед об этом судить трудно, так как a_3 неизвестно. Исходный выбор остается поэтому произвольным, но указанное требование может быть учтено при итерации. Заметим, что введение в S аргумента k наряду с $T(k)$ тоже имеет целью облегчить наилучший выбор.

Итак, первым шагом к синтезу светофильтра, обладающего заданной кривой пропускания $T(k)$, является выбор спектральной характеристики $S[k, T(k)]$, удовлетворяющей условиям (14) и связанной с величиной a приближенным равенством (16).

Применение преобразования Фурье

Обозначив

$$\sqrt{S[k, T(k)]} = Q(k), \quad (17)$$

согласно формулам (5), (6) и (16) получим

$$\int_0^x \frac{dn}{dx} \frac{1}{2n} \exp(ikx)\, dx = Q(k) \exp[i\varphi(k)], \quad (18)$$

где $\varphi(k)$ — фаза, выбор которой, вообще говоря, произволен, но должен гарантировать вещественность $n(x)$. Равенство (18) является приближенным, если считать $n(x)$ заданным. Но мы задаем, наоборот, правую часть и рассматриваем это равенство как точное, определяющее некоторую функцию $n(x)$ такую, что принятие ее в качестве показателя преломления слоя реализует заданный коэффициент пропускания в силу того же равенства приближенно.

Перепишем формулу (18) с бесконечными пределами интегрирования (поскольку вне слоя $\frac{dn}{dx}=0\Big)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dn}{dx}\frac{1}{2n}\exp(ikx)\,dx=Q(k)\exp[i\varphi(k)]. \tag{19}$$

Это — интеграл Фурье, обращая который, находим

$$\nu(x)=\frac{dn}{dx}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Q(k)\exp[i(\varphi(k)-kx)]\,dk. \tag{20}$$

Полученная формула дает принципиальное решение задачи синтеза. Конкретное применение ее было показано в [1]. Здесь мы обсудим эту формулу с общей точки зрения и установим некоторые новые возможности ее использования.

1. Зависимость $\nu(x)$ от фазы $\varphi(k)$. Если представим $\nu(x)$ в виде суммы четной $\nu_p(x)$ и нечетной $\nu_n(x)$ функций

$$\nu(x)=\nu_p(x)+\nu_n(x), \tag{21}$$

то, учитывая также условие вещественности $\nu(x)$, из формулы (20) получим:

$$\begin{aligned}\nu_p(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Q(k)\cos\varphi(k)\cos kx\,dk,\\ \nu_n(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Q(k)\sin\varphi(k)\sin kx\,dx,\end{aligned} \tag{22}$$

причем должны тождественно выполняться равенства

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}Q(k)\sin\varphi(k)\cos kx\,dk=0,\\ &\int_{-\infty}^{+\infty}Q(k)\cos\varphi(k)\sin kx\,dk=0.\end{aligned} \tag{23}$$

Из этих равенств следует, что $Q(k)$ должно быть четной функцией, а $\varphi(k)$ или $\varphi(k)\pm\pi$ — нечетной. Если подвергнем фазу преобразованию $\varphi(k)\to-\varphi(k)$, то, как видно из формул (22), $\nu_p(x)$ не изменится, а $\nu_n(x)$ переменит знак. Если же сделаем $\varphi(k)\to\pi-\varphi(k)$, то $\nu_p(x)$ переменит знак, а $\nu_n(x)$ не изменится. Наконец, если положим $\varphi(k)\to\pi+\varphi(k)$, то и $\nu_p(x)$, и $\nu_n(x)$ переменят знак. Таким образом, в зависимости от выбора фазы мы получаем различные решения. Конечно, возможны, кроме указанных преобразований, и другие способы варьирования фазы. Частным случаем является выбор постоянной фазы, т. е. $|\varphi(k)|=\varphi=\text{const}$, причем условие нечетности $\varphi(k)$ требует, чтобы $\varphi(-k)=-\varphi(k)=-\varphi$. Тогда формулы (22) принимают вид:

$$v_p(x) = \frac{\cos\varphi}{\pi}\int_0^{\infty} Q(k)\cos kx\,dk,$$
$$v_n(x) = \frac{\sin\varphi}{\pi}\int_0^{\infty} Q(k)\sin kx\,dk. \tag{24}$$

2. Синтезируя светофильтр, мы обычно интересуемся поведением пропускания не во всем спектре, а только в ограниченном его участке. Обозначим его через $[k_1, k_2]$. Это обстоятельство сильно расширяет возможности выбора функции $Q(k)$, поскольку вне интересующего нас участка вид $T(k)$ остается совершенно произвольным; следовательно, одной и той же функции $S[k, T(k)]$ соответствует множество функций $Q(k)$. Целесообразно эту свободу использовать все-таки иным способом. Вычислив по формуле (20) функцию $\nu(x)$ при какой-либо заданной функции $Q(k)$, мы можем заменить первую функцией

$$\nu_1(x) = \nu(x) + \eta(x), \tag{25}$$

где

$$\eta(x) = \sum_j c_j \left\{\delta(x - x_j) - \frac{\sin[k_2(x - x_j)] - \sin[k_1(x - x_j)]}{\pi(x - x_j)}\right\}, \tag{26}$$

c_j — произвольные числа и x_j — произвольно фиксированные (возрастающие с индексом) значения координаты x. Как легко убедиться, функция $\eta(x)$ обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta(x)\exp(ikx)\,dx = 0, \quad \text{если} \quad k < k_1 \quad \text{или} \quad k > k_2. \tag{27}$$

Это значит, что $\nu_1(x)$ дает в интервале $[k_1, k_2]$ то же значение a, что и $\nu(x)$, и следовательно, ту же кривую пропускания $T(k)$ (с той же степенью точности). А так как согласно формуле (6)

$$n(x) = \exp\left(2\int_{-\infty}^{x} \nu(u)\,du\right), \tag{28}$$

то замена $\nu(x)$ на $\nu_1(x)$ приводит к замене $n(x)$ на

$$n_1(x) = N(x)\,n(x), \tag{29}$$

где

$$N(x) = \exp\left(2\int_{-\infty}^{x} \eta(u)\,du\right). \tag{30}$$

Подставляя сюда вместо $\eta(u)$ выражение (26), находим

$$N(x) = \exp\left(2\sum_{j=1}^{m} c_j\right) \prod_j \exp\left\{\frac{2c_j}{\pi}[\mathrm{Si}[k_1(x - x_j)] - \mathrm{Si}[k_2(x - x_j)]]\right\}, \tag{31}$$

где m определяется условием $x_m < x < x_{m+1}$. Первый множитель в этой формуле отражает дискретное изменение $N(x)$ в точках x_j (что обусловлено присутствием δ-функции в формуле (26). Таким образом, если показатель преломления реализует в интервале частот $[k_1, k_2]$ заданную кривую $T(k)$, то такую же кривую реализует приближенно и показатель преломления $n_1(x)$. В этом случае слой состоит из нескольких частей, внутри которых показатель преломления изменяется непрерывно, а на границах испытывает скачки, величина которых зависит от чисел c_j. Изложенный прием может быть полезен для корректировки показателя преломления в тех случаях, если нужно его уменьшить или увеличить в том или другом промежутке.

Заключение

Итак, мы показали, что предложенный в [1] метод синтеза диэлектрических светофильтров обладает большой общностью и допускает варьирование решения в широких пределах. Изложенным не исчерпываются возможности метода. Дальнейшее развитие его и, в частности, вопросы, связанные с итерированием, будут рассмотрены в последующих статьях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосси Л., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 229 (1974).
2. Сосси Л., Кард П., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 17, 41 (1968).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 24/VI 1975

L. SOSSI

MITMEKIHILISTE DIELEKTRILISTE VALGUSFILTRITE TEOORIAST

Artiklis [1] esitatud interferentsfiltrite sünteesi meetodi üldistusena näidatakse, et Fourier' teisendusvalemis (18) on võimalik funktsiooni $Q(k)$, kus k on lainearv, valida lõpmata mitmeti. On ainult nõutav, et sellega seotud funktsioon $S[k, T(k)] = Q^2(k)$ (valem (17)), kus $T(k)$ on etteantud läbilaskvustegur, rahuldaks tingimusi (14). Valiku kitsendamine täpsema sünteesi huvides on võimalik ainult iteratsiooni kaudu. Juhul kui sünteesitaval filtril peab etteantud spektraalkõver $T(k)$ olema piiratud spektrivahemikus k_1, k_2, on võimalik korrutada murdumisnäitajat $n(x)$ teguriga $N(x)$ (valem (31), kus c_j ja x_j on meelevaldsed), ilma et $T(k)$ selles vahemikus oluliselt muutuks.

L. SOSSI

ON THE THEORY OF THE SYNTHESIS OF MULTILAYER DIELECTRIC LIGHT-FILTERS

As a generalization of the method of the synthesis of interference light-filters described in [1], it is shown that the function $Q(k)$ in the Fourier transformation formula (18), where k is the wave number, is to a large extent arbitrary. It is only required that the involved function $S[k, T(k)] = Q^2(k)$ (formula (17)), in which $T(k)$ is the transmittance given in advance, should satisfy the conditions presented by (14). A limitation of this arbitrariness and, accordingly, a more accurate synthesis is solely possible by iteration. If the filter must have the given transmittance $T(k)$ only in the restricted spectral interval $[k_1, k_2]$, then the refractive index $n(x)$ can be transformed by a factor $N(x)$ (formula (31), where c_j and x_j are arbitrary), without any essential change of $T(k)$ in this interval.