EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.06

УДК 512.25/.26+519.3 : 330.115

*Эбу ТАММ*

# О КВАЗИВЫПУКЛОСТИ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТИ И КВАНТИЛЯ

Задачи стохастического программирования с целевыми функциями или ограничениями в виде функций вероятности и квантиля естественным образом возникают при решении разных экономических и технических проблем [1] и поэтому изучение свойств этих функций представляет несомненный интерес.

Рассмотрим следующие функции вероятности и квантиля:

$$v_\gamma(x) = P[f(x,y) \leqslant \gamma], \tag{1}$$

$$w_\alpha(x) = \min \{z \in R^1,\ P[f(x,y) \leqslant z] \geqslant \alpha\}, \tag{2}$$

$$\bar{v}_\gamma(x) = P[f(x,y) < \gamma], \tag{3}$$

$$\bar{w}_\alpha(x) = \max \{z \in R^1,\ P[f(x,y) < z] \leqslant \alpha\}, \tag{4}$$

где $f(x,y)$ — действительная функция от $n$-мерного вектора $x$ и от случайного $m$-мерного вектора $y$, $\alpha$ и $\gamma$ — действительные числа $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, $P$ означает вероятность. Другие возможные виды этих функций и связи между ними рассматривались в [2].

В нелинейном программировании выпуклые и вогнутые (см., напр., [3]) функции имеют особое значение, поскольку в выпуклых задачах некоторые необходимые условия оптимальности (условия Куна—Такера и др.) являются и достаточными. Кроме того, для таких задач можно построить более эффективные методы решения, чем для остальных. Но во многих случаях требование выпуклости функции оказывается слишком сильным. Например, не имеет смысла требовать выпуклость функций (1) и (3) во всем пространстве, потому что они ограничены, а выпуклые и ограниченные во всем пространстве функции — постоянные. Известно (см., напр., [3]), что условие выпуклости в задачах математического программирования можно заменить более слабым условием квазивыпуклости *, причем упомянутые выше удобные свойства задачи сохраняются.

В данной работе показывается, какие соотношения имеют место между квазивыпуклостью и квазивогнутостью функций (1)—(4).

* Функция $h(x)$ называется в выпуклой области $X \subset R^n$ квазивыпуклой, если

$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \max[h(x_1), h(x_2)],$$

и квазивогнутой, если

$$h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min[h(x_1), h(x_2)]$$

для любых $x_1$, $x_2$ и любого $\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Если $h(x)$ квазивыпукла, то $-h(x)$ — квазивогнута.

Теорема 1. *Если $v_\gamma(x)$ в выпуклой области $X \subset R^n$ квазивыпукла (квазивогнута) для любого $\gamma$, то $w_\alpha(x)$ квазивогнута (квазивыпукла) в этой области для любого $\alpha$.*

Доказательство. Пусть $\alpha$ фиксированное, но произвольное число и пусть $v_\gamma(x)$ квазивыпукла в $X$ для любого $\gamma$. Выбираем произвольно $x_1, x_2 \in X$ и обозначаем

$$z(\lambda) = w_\alpha(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2). \tag{5}$$

Тогда

$$P[f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, y) \leqslant z(\lambda)] \geqslant \alpha. \tag{6}$$

Из квазивыпуклости $v_\gamma(x)$ для любого $\gamma$ следует $P[f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, y) \leqslant z(\lambda)] \leqslant \max\{P[f(x_1, y) \leqslant z(\lambda)],\ P[f(x_2, y) \leqslant z(\lambda)]\}$ и, учитывая (6), $\max\{P[f(x_1, y) \leqslant z(\lambda)],\ P[f(x_2, y) \leqslant z(\lambda)]\} \geqslant \alpha$. Не нарушая общности, можно допустить, что $P[f(x_1, y) \leqslant z(\lambda)] \geqslant \alpha$. Тогда $\min\{z \in R^1,\ P[f(x_1, y) \leqslant z] \geqslant \alpha\} \leqslant z(\lambda)$, т. е.

$$w_\alpha(x_1) \leqslant z(\lambda). \tag{7}$$

Из (5) и (7) получаем, что $w_\alpha(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geqslant w_\alpha(x_1)$ и тем более $w_\alpha(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geqslant \min[w_\alpha(x_1), w_\alpha(x_2)]$, следовательно, $w_\alpha(x)$ квазивогнута.

Допустим теперь, что $v_\gamma(x)$ квазивогнута в $X$ для любого $\gamma$. Выбирая $\gamma = z(\lambda) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, получаем

$$P[f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, y) \leqslant z(\lambda) - \varepsilon] \geqslant$$
$$\geqslant \min\{P[f(x_1, y) \leqslant z(\lambda) - \varepsilon],\ P[f(x_2, y) \leqslant z(\lambda) - \varepsilon]\}. \tag{8}$$

По определению функции квантиля (2) с учетом (5) имеем

$$P[f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, y) \leqslant z(\lambda) - \varepsilon] < \alpha. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что $\min\{P[f(x_1, y) \leqslant z(\lambda) - \varepsilon],\ P[f(x_2, y) \leqslant \leqslant z(\lambda) - \varepsilon]\} < \alpha$. Пусть $P[f(x_1, y) \leqslant z(\lambda) - \varepsilon] < \alpha$, откуда $w_\alpha(x_1) > > z(\lambda) - \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ можно задавать сколь угодно малым, то

$$w_\alpha(x_1) \geqslant z(\lambda). \tag{10}$$

Из (5) и (10) следует, что $w_\alpha(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqslant w_\alpha(x_1)$, т. е. $w_\alpha(x)$ квазивыпукла. Теорема доказана.

Приведем пример, показывающий, что предположения теоремы 1 недостаточно для вогнутости функции $w_\alpha(x)$ для любого $\alpha$. Пусть $f(x, y) = e^{-x^2} y$, где $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [0, 1]$ и распределен на этом отрезке равномерно. Функция $f_1(x) = e^{-x^2}$ квазивогнута, $f_2(y) = y$ неотрицательна. Согласно [2], $v_\gamma(x) = P[e^{-x^2} y \leqslant \gamma]$ квазивыпукла для любого $\gamma$. Покажем, что $w_{1/2}(x)$ не является вогнутой. Выбираем $x_1 = 0$, $x_2 = 2\sqrt{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} w_{1/2}(x_1) &= \min\{z \in R^1, P[f(x_1, y) \leqslant z] \geqslant 1/2\} = \\ &= \min\{z \in R^1, P[e^0 \cdot y \leqslant z] \geqslant 1/2\} = \\ &= \min\{z \in R^1, P[y \leqslant z] \geqslant 1/2\} = 1/2 \end{aligned}$$

Аналогично получаем $w_{1/2}(x_2) = \frac{1}{2e^8}$, $w_{1/2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{2e^2}$ и $\frac{1}{2} w_{1/2}(x_1) + + \frac{1}{2} w_{1/2}(x_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^8}$. Поскольку $\frac{1}{4} + \frac{1}{4e^8} > \frac{1}{2e^2}$, то $w_{1/2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < < \frac{1}{2} w_{1/2}(x_1) + \frac{1}{2} w_{1/2}(x_2)$, и $w_{1/2}(x)$ действительно не является вогнутой.

Оказывается, что верно и утверждение, обратное утверждению теоремы 1.

Теорема 2. *Если $w_\alpha(x)$ в выпуклой области $X \subset R^n$ квазивыпукла (квазивогнута) для любого $\alpha$, то $v_\gamma(x)$ квазивогнута (квазивыпукла) в этой области для любого $\gamma$.*

Доказательство. Пусть $w_\alpha(x)$ квазивыпукла при любом $\alpha$ и $x_1, x_2 \in X$. Фиксируем $\gamma$ и обозначаем

$$P[f(x_1, y) \leqslant \gamma] = p_1 \qquad (v_\gamma(x_1) = p_1), \tag{11}$$

$$P[f(x_2, y) \leqslant \gamma] = p_2 \qquad (v_\gamma(x_2) = p_2). \tag{12}$$

Пусть $p_1 \geqslant p_2$. Тогда из определения функции квантиля (2) имеем

$$w_{p_1}(x_1) \leqslant \gamma, \quad w_{p_1}(x_2) \leqslant \gamma. \tag{13}$$

По предположению $w_{p_1}(x)$ квазивыпукла, т. е. $w_{p_1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \max[w_{p_1}(x_1), w_{p_1}(x_2)]$ и с учетом (13) $\max[w_{p_1}(x_1), w_{p_1}(x_2)] \leqslant \gamma$, откуда $w_{p_1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \gamma$. Из последнего неравенства вытекает, что $P[f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \leqslant \gamma] \geqslant p_1$, откуда, учитывая (11), получаем

$$P[f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \leqslant \gamma] \geqslant P[f(x_1, y) \leqslant \gamma], \text{ т. е.}$$

$$v_\gamma(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant v_\gamma(x_1)$$

и, следовательно, $v_\gamma(x)$ квазивогнута.

Пусть теперь $w_\alpha(x)$ квазивогнута для любого $\alpha$. Введем обозначение

$$p(\lambda) = P[f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \leqslant \gamma] \quad (v_\gamma(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = p(\lambda)). \tag{14}$$

Тогда $w_{p(\lambda)}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \min[w_{p(\lambda)}(x_1), w_{p(\lambda)}(x_2)]$.

Пусть, например

$$w_{p(\lambda)}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant w_{p(\lambda)}(x_1). \tag{15}$$

По (14) $w_{p(\lambda)}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \gamma$, а в силу (15) тем более $w_{p(\lambda)}(x_1) \leqslant \gamma$, откуда $P[f(x_1, y) \leqslant \gamma] \geqslant p(\lambda)$ $(v_\gamma(x_1) \geqslant p(\lambda))$ и, учитывая (14), $v_\gamma(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant v_\gamma(x_1)$. Следовательно, $v_\gamma(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \max[v_\gamma(x_1), v_\gamma(x_2)]$ и поэтому $v_\gamma(x)$ квазивыпукла. Теорема доказана.

Аналогичные связи имеют место и между функциями (3) и (4).

Теорема 3. *Если $\bar{v}_\gamma(x)$ в выпуклой области $X \subset R^n$ квазивыпукла (квазивогнута) для любого $\gamma$, то $\bar{w}_\alpha(x)$ квазивогнута (квазивыпукла) в этой области для любого $\alpha$.*

Доказательство.

$$\bar{v}_\gamma(x) = P[f(x, y) < \gamma] = 1 - P[f(x, y) \geqslant \gamma] = 1 - P[-f(x, y) \leqslant -\gamma], \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\bar{w}_\alpha(x) &= \max\{z \in R^1, P[f(x, y) < z] \leqslant \alpha\} = \\ &= \max\{z \in R^1, 1 - P[-f(x, y) \leqslant -z] \leqslant \alpha\} = \\ &= -\min\{-z \in R^1, 1 - P[-f(x, y) \leqslant -z] \leqslant \alpha\} = \\ &= -\min\{z \in R^1, P[-f(x, y) \leqslant z] \geqslant 1 - \alpha\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Пусть $\bar{v}_\gamma(x)$ квазивыпукла (квазивогнута) для любого $\gamma$. Тогда в силу (16) $\hat{v}_\gamma(x) = P[-f(x, y) \leqslant -\gamma]$ квазивогнута (квазивыпукла) для любого $\gamma$. Из теоремы 1: $\hat{w}_{1-\alpha}(x) = \min\{z \in R^1, P[-f(x, y) \leqslant z] \geqslant 1 - \alpha\}$ квазивыпукла (квазивогнута) и по (17) $\bar{w}_\alpha(x)$ квазивогнута (квазивыпукла) для любого $\alpha$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если $\bar{w}_\alpha(x)$ в выпуклой области $X \subset R^n$ квазивыпукла (квазивогнута) для любого $\alpha$, то $\bar{v}_\gamma(x)$ квазивогнута (квазивыпукла) в этой области для любого $\gamma$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Известно несколько классов функций $f(x, y)$ и распределений вектора $y$, при которых функции (1) и (3) квазивыпуклы. В [4] доказано, что если $f(x,y)$ вогнута в $R^{n+m}$ и распределение вектора $y \in R^m$ логарифмически вогнуто, т. е. $P[\lambda A + (1-\lambda)B] \geqslant (P[A]^{\lambda}(P[B]))^{1-\lambda}$ для любых выпуклых множеств $A, B \subset R^m$ и $\lambda \in (0,1)$, то функция $\tilde{v}_0(x) = P[f(x,y) \geqslant 0]$ логарифмически вогнута в $R^n$. Неотрицательная функция $h(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subset R^n$, называется логарифмически вогнутой, если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in (0,1)$ верно $h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant [h(x_1)]^{\lambda}[h(x_2)]^{1-\lambda}$. Непосредственно вытекает, что если $h(x)$ логарифмически вогнута, то она и квазивогнута. Легко показать, что при этих условиях, наложенных на функцию $f(x,y)$ и распределение вектора $y$, $\tilde{v}_\gamma(x) = P[f(x,y) \geqslant \gamma]$ логарифмически вогнута для любого $\gamma$. Следовательно, $\tilde{v}_\gamma(x)$ квазивогнута и $\bar{v}_\gamma(x) = 1 - \tilde{v}_\gamma(x)$ квазивыпукла. По теореме 3 при условиях [4] $\overline{w}_\alpha(x)$ квазивогнута.

В [2] установлено, что если функция $f(x,y)$ представима в виде

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) + f_3(y), \tag{18}$$

где $f_1(x)$ квазивогнута (квазивыпукла) и $f_2(y)$ неотрицательна (неположительна), то $v_\gamma(x)$ квазивыпукла для любого $\gamma$. Ниже этот результат обобщают теоремы (5) и (6).

Теорема 5. *Функции $v_\gamma(x)$ и $\bar{v}_\gamma(x)$ в выпуклой области $X \subset R^n$ квазивыпуклы для любого $\gamma$, если $f(x,y)$ представима в виде $f(x,y) = \varphi(u(x), y)$, где $u(x)$ квазивыпукла (квазивогнута) в области $X$ и $\varphi(t,y)$ при любом $y$ монотонно убывающая (возрастающая) функция действительного переменного.*

Доказательство. Пусть $f(x,y) = \varphi(u(x), y)$, $u(x)$ квазивыпукла и $\varphi(t,y)$ монотонно убывающая функция $t$ при любом $y$. Пусть, например, $u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant u(x_1)$. Тогда $\varphi(u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \geqslant \varphi(u(x_1), y)$ при любом $y$. Если при каком-нибудь $\bar{y}$ $\varphi(u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \bar{y}) \leqslant \gamma$, то и $\varphi(u(x_1), \bar{y}) \leqslant \gamma$. Следовательно, $P[\varphi(u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y) \leqslant \gamma] \leqslant P[\varphi(u(x_1), y) \leqslant \gamma]$, т. е. $v_\gamma(x)$ квазивыпукла. Остальная часть теоремы доказывается аналогично.

Теорема 6. *Функции $v_\gamma(x)$ и $\bar{v}_\gamma(x)$ в выпуклой области $X \subset R^n$ квазивогнуты для любого $\gamma$, если $f(x,y)$ представима в виде $f(x,y) = \varphi(u(x), y)$, где $u(x)$ квазивыпукла (квазивогнута) в области $X$ и $\varphi(t,y)$ при любом $y$ монотонно возрастающая (убывающая) функция действительного переменного.*

При предположениях теоремы 6 функции (1) и (3) квазивогнуты. Доказательство с необходимыми изменениями следует доказательству теоремы 5.

В работе над данной статьей большую помощь автору оказал $\boxed{\text{Э. Райк}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Математические методы управления в условиях неполной информации, М., 1974.
2. Райк Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, 142 (1972).
3. Зангвилл У. И., Нелинейное программирование, М., 1973.
4. Prékopa A., Math. Operationsforsch. u. Statist., **3**, H. 5, 349 (1972).

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
7/V 1975

Ebu TAMM

## TÕENÄOSUS- JA KVANTIILFUNKTSIOONIDE KVAASIKUMERUSEST

Vaadeldakse tõenäosusfunktsioone $v_\gamma(x)=P[f(x,y)\leqslant\gamma]$ ja $\bar{v}_\gamma(x)=P[f(x,y)<\gamma]$ ning kvantiilfunktsioone $w_\alpha(x)=\min\{z\in R^1, P[f(x,y)\leqslant z]\geqslant\alpha\}$ ja $\bar{w}_\alpha(x)=\max\{z\in R^1, P[f(x,y)<z]\leqslant\alpha\}$, kus $x\in R^n$, juhuslik vektor $y\in R^m$, reaalarvud $\alpha\in[0,1]$ ja $\gamma$ on fikseeritud. Tõestatakse, et $v_\gamma(x)$ on kvaasikumer (kvaasinõgus) parajasti siis, kui $w_\alpha(x)$ on kvaasinõgus (kvaasikumer), ning et samasugune seos kehtib ka funktsioonide $\bar{v}_\gamma(x)$ ja $\bar{w}_\alpha(x)$ vahel.

On esitatud mõned funktsioonide $f(x,y)$ klassid, mille korral $v_\gamma(x)$ ning $\bar{v}_\gamma(x)$ on kvaasikumerad või kvaasinõgusad.

Ebu TAMM

## ON THE QUASI-CONVEXITY OF PROBABILITY AND QUANTILE FUNCTIONS

The probability functions $v_\gamma(x)=P[f(x,y)\leqslant\gamma]$ and $\bar{v}_\gamma(x)=P[f(x,y)<\gamma]$ and quantile functions $w_\alpha(x)=\min\{z\in R^1, P[f(x,y)\leqslant z]\geqslant\alpha\}$ and $\bar{w}_\alpha(x)=\max\{z\in R^1, P[f(x,y)<z]\leqslant\alpha\}$ are considered. The vector $x\in R^n$, the random vector $y\in R^m$, and the real numbers $\alpha\in[0,1]$ and $\gamma$ are fixed.

It is shown that $v_\gamma(x)$ is quasi-convex (quasi-concave) if $w_\alpha(x)$ is quasi-concave (quasi-convex). An analogous relation also holds between $\bar{v}_\gamma(x)$ and $\bar{w}_\alpha(x)$.

Some classes of functions $f(x,y)$ are found, for which $v_\gamma(x)$ and $\bar{v}_\gamma(x)$ are quasi-convex or quasi-concave.