EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.04

УДК 531.55

И. КЕЙС

О ПОНИЖЕНИИ РАЗМЕРНОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ИЗВЕСТНЫМИ ИНВАРИАНТАМИ НА СУБКАНОНИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

В работе получено обобщенно-каноническое (субканоническое) преобразование, переводящее исходную неавтономную систему в две подсистемы, первая из которых принимает канонический вид, если импульсы второй — инварианты. В теоремах 1 и 2 даются достаточные условия для получения $2(n-r)$-мерной канонической подсистемы при наличии r заданных или неизвестных инвариантов системы. Получено обращение принципа Мопертюи для систем с известным инвариантом и определены условия, при которых систему Гамильтона можно трактовать как систему Мопертюи. Результаты иллюстрируются на примере понижения порядка неавтономной системы Гамильтона с инвариантом-связкой гамильтониана и импульсов.

1. Рассмотрим неавтономную динамическую систему

$$\dot{q}''=\partial G''/\partial p'', \quad \dot{p}''=-\partial G''/\partial q'' \quad (\dot{f}=df/dt), \tag{1.1}$$

$$q''=(q_\mu)^*, \quad p''=\partial L''/\partial \dot{q}''=(p_\nu)^* \quad (\mu, \nu=\overline{1, n-2}),$$
$$L''=L''(t, q'', \dot{q}''), \quad |\partial^2 L''/\partial \dot{q}_\mu \partial \dot{q}_\nu| \neq 0,$$
$$G''=G''(t, q'', p'')=p''\cdot \dot{q}''-L''(t, q'', \dot{q}''),$$

которой соответствует форма Пфаффа

$$\omega''_d=p''\cdot dq''-G''\,dt. \tag{1.2}$$

Введем [1–3] новый параметр (τ')

$$d\tau'/dt=v_1^{-1}(t, q'', p''), \quad 0<v_1\in C_2, \tag{1.3}$$

и новую функцию Гамильтона $G'=v_1(p_{n-1}+G'')$ расширенной системы

$$dq'/d\tau'=\partial G'/\partial p', \quad dp'/d\tau'=-\partial G'/\partial q', \tag{1.4}$$
$$q'=(q_\mu, t)^*, \quad p'=(p_\nu, p_{n-1})^*, \quad p_{n-1}=\partial v_1 L''/\partial v_1=-G''.$$

Уравнения (1.4) имеют частный интеграл $G''+p_{n-1}=0$, задающий в пространстве q', p' инвариантное множество Ω'' системы (1.4), на котором (1.4) эквивалентна (1.1), (1.3) и соотношению $\dot{G}''=\partial G''/\partial t$. Система (1.1) погружена в q'', t-симметричную каноническую систему (1.4) с пфаффианом $\omega'_d=p'\cdot dq'-G'd\tau'$. Для сохранения автономности системы (1.4) при $\partial G''/\partial t=0$ достаточно считать, что произвольная функция $v_{1,2}=v_{1,2}(q'', p'')$. В случае преобразования параметра τ' операцию погружения следует повторить, вводя непреобразуемый параметр τ и функцию $H=G$ равенствами

$$d\tau/d\tau'=v_2^{-1}(q',p'),\quad p_n=\frac{\partial(v_2L')}{\partial v_2}=-G',\quad G=v_2(G'+p_n).$$

Тогда получим $2n$-мерную расширенную систему

$$dq/d\tau=\partial G/\partial p,\quad dp/d\tau=-\partial G/\partial q,\tag{1.5}$$

$$q=(q_\mu,t,\tau')^*,\quad p=(p_\nu,p_{n-1},p_n)^*,\quad G=G(q',p),$$

союзную с дифференциальной формой

$$\omega_d(p,q)=p\cdot dq-G\,d\tau.\tag{1.6}$$

Интегральные кривые системы (1.1) лежат в пространстве (q,p) на пересечении $\Omega''\cap\Omega'$ инвариантных множеств системы (1.5), соответствующих частным интегралам $h_{r-1}=p_{n-1}+G''=h_r=p_n=0$. Используя это обстоятельство, можно [1,2], не уменьшая общности, вместо системы (1.1) с известными независимыми общими интегралами $h_1,h_2,\ldots,h_{r-2}$ и формой (1.2) рассматривать систему (1.5) с инвариантами $h_\alpha(q,p)\,(\alpha=\overline{1,r})$ и формой (1.6). Далее для упрощения инварианты h_{r-1}, h_r будем использовать как общие.

Предполагается, что $h_\alpha(x,p)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\operatorname{rang}\|\partial h_\alpha/\partial p_k\|=r\leqslant n$, $k=\overline{1,n}$.

2. Субканоническое преобразование переменных q, p в $z=(x_i,\ \xi_j,\ y_i,\ \eta_j)^*$ определим равенством дифференциальных форм

$$\omega_d(z)\equiv wy_idx_i-Hd\tau-v_jd\eta_j+dV=c(p_kdq_k-Gd\tau),\tag{2.1}$$

$$x=(x_i)^*,\quad y=(y_i)^*,\quad \xi=(\xi_j)^*,\quad \eta=(\eta_j)^*\quad (i=\overline{1,n-r},j=\overline{1,r}),$$

$$w=w(\eta),\quad v_j=v_j(\xi,\eta),\quad |\partial v_j/\partial\xi_\alpha|\neq0,\quad 0<w\in C_2,\quad v_j\in C_2,$$

$$H=H(\tau,x,\xi,y,\eta),\quad V=V(\tau,q,x,\eta),\quad c=\mathrm{const},\quad V\in C_2,$$

в котором функции w, v_j произвольны, а V удовлетворяет условию

$$N_0=|\partial^2V/\partial q_kz'_l|\neq0,\quad z'_i=x_i,\quad z'_{n-r+j}=\eta_j,\quad l=\overline{1,n},\tag{2.2}$$

обратимости отображения

$$p=c^{-1}\frac{\partial V}{\partial q},\quad y=-w^{-1}\frac{\partial V}{\partial x},\quad v(\xi,\eta)=\frac{\partial V}{\partial\eta},\tag{2.3}$$

заданного соотношением (2.1). Значение H дает равенство

$$H=cG+\frac{\partial V}{\partial t}.\tag{2.4}$$

Субканоническое преобразование (2.3) принимает вид контактного преобразования С. Ли при $c=1$, $w\equiv1$, $v\equiv\xi$ и отличается от канонического преобразования [4] условиями $w\not\equiv\mathrm{const}$, $v\not\equiv\xi$. В силу равенства билинейных ковариантов

$$\delta\omega_d(z)-d\omega_\delta(z)=c(\delta\omega_d(p,q)-d\omega_\delta(p,q))=0$$

получаем союзную для формы (2.1) систему

$$\frac{dx_i}{d\tau}=w^{-1}\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{d\tau}=-w^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}+\dot{w}y_i\right),\tag{2.5}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau}=D^*\left[\frac{\partial H}{\partial\eta}-w^{-1}\left(y\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial\eta}\right]-A\frac{\partial H}{\partial\xi},\quad \frac{d\eta}{d\tau}=-D\frac{\partial H}{\partial\xi},\tag{2.6}$$

$$B=\|b_{\alpha j}\|,\quad b_{\alpha j}=\frac{\partial v_j}{d\xi_\alpha},\quad D=B^{-1},\quad \dot w=\frac{dw}{d\tau},$$

$$A=D^*CD,\quad A^*=-A,\quad C=\|C_{\alpha j}\|,\quad C_{\alpha j}=\frac{\partial v_\alpha}{\partial\eta_j}-\frac{\partial v_j}{\partial\eta_\alpha},$$

в которую преобразование (2.3) переводит уравнения (1.5).

Из структуры подсистемы (2.6) новых уравнений выводится

Лемма. *Функция H субканонической системы* (2.5), (2.6) *не зависит от вектора ξ тогда и только тогда, когда величины $\eta_j=g_j(\tau,q,p)$, данные преобразованием* (2.3), *являются независимыми общими инвариантами системы* (1.5).

Доказательство. Если $g_j(\tau,q,p)$ — инварианты системы (1.5), то η_j — инварианты системы (2.5), (2.6). В силу $|D|\neq 0$ последнее возможно лишь в случае $\partial H/\partial\xi=0$. Необходимость установлена. Если имеем $\partial H/\partial\xi=0$, то $g_j(\tau,q,p)$ — инварианты системы (1.5), независимые по условиям (2.1), (2.2). Лемма доказана.

Следствие 1: подсистема типа Стрэтта (2.5) приводится к каноническому виду

$$dx/d\sigma=\partial H/\partial y,\quad dy/d\sigma=-\partial H/\partial x,\tag{2.7}$$

$$d\sigma/d\tau=w^{-1},\quad H=H(\sigma,x,y\,|\,\eta),\quad \eta=\text{const},$$

если величины η, заданные субканоническим преобразованием (2.1), являются независимыми инвариантами системы (1.5).

Поставим задачу — установить условия, при которых субканоническое преобразование (2.1) даст $2(n-r)$-мерную каноническую подсистему (2.5) для любых фиксированных значений известных инвариантов $h^0{}_\alpha=h_\alpha(q^0,p^0),q^0=q(\tau^0),\ p^0=p(\tau^0)$.

Для решения задачи воспользуемся инвариантами h_α. Предположим, что существует субканоническое преобразование (2.1)—(2.3), для которого одновременно выполняются равенства

$$\eta_j=h_j(q,p),\quad \operatorname{rang}\|\partial h_\alpha/\partial p_k\|=r,\quad j=\overline{1,r}.\tag{2.8}$$

Допущение означает, что отображение (2.3) переводит известные инварианты h системы (1.5) в импульсы η новой системы (2.5), (2.6). Ввиду соотношений (2.3) условие (2.8) равносильно уравнениям

$$f_j(q,\psi)\equiv h_j(q,c^{-1}\psi)=\eta_j\quad(\psi=\partial V/\partial q),\tag{2.9}$$

в которых η_j рассматриваются как произвольные и независимые параметры $\eta_j=\overset{0}{\eta}_j=h_j(q^0,p^0)$. Система (2.9) должна быть совместной по предположению. В силу независимости η_j и свойств $h_\alpha(q,p)$ необходимо [5,6], чтобы все коммутаторы $f_{\alpha j}$ системы (2.9) тождественно исчезали для $V=V(\tau,q,x,\eta)$. Отсюда выводим необходимые для совместности системы (2.9) уравнения

$$f_{\alpha j}(q,\psi)=[f_\alpha,f_j]=\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial f_j}{\partial\psi_k}-\frac{\partial f_j}{\partial q_k}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\psi_k}=\frac{1}{c}(h_\alpha,h_j)=0,\tag{2.10}$$

$$(h_\alpha,h_j)=\left(\frac{\partial h_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial h_j}{\partial p_k}-\frac{\partial h_j}{\partial q_k}\frac{\partial h_\alpha}{\partial p_k}\right)_{p=c^{-1}\psi}.$$

Использовав коммутаторы для независимой подсистемы в системе уравнений (2.9), (2.10) и всех последующих, построим полную якобиеву систему [5–7] независимых уравнений F

$$f_j=\eta_j, \quad f'_m=0 \quad (j=\overline{1,r},\ m=\overline{r+1,s}) \tag{2.11}$$

ранга s для совместной системы (2.9), где $r\leqslant s\leqslant n$. Тогда на основании следствия 1 получим следующий результат.

Теорема 1. *Если инварианты* (2.8) *и постоянная* $c=c_*\neq 0$ *определяют полную совместную систему* (2.11), *которая имеет решение* $V=V_*(\tau,q,x,\eta)$, *удовлетворяющее условиям* (2.1), (2.2), *то существует субканоническое преобразование* (2.3), *приводящее подсистему* (2.5) *к каноническому виду* (2.7) *с рангом* $2(n-r)$.

Полученное утверждение является модификацией теоремы С. Ли [7] о возможности понижения порядка канонической системы на $2r$ единиц при наличии r инвариантов (2.8), которые находятся в инволюции $(h_\alpha,h_j)\underset{p,q}{\equiv}0$. В этом случае система уравнений (2.11) совпадает с (2.9) и $c\equiv 1$. Теорема 1 распространяет результат С. Ли на субканоническое преобразование (2.1), в котором $w\not\equiv\mathrm{const}$, $v\not\equiv\xi$. Выбор функций $w(\eta)$, $v(\xi,\eta)$ и постоянной c можно использовать для упрощения вида $2r$-мерной подсистемы (2.6) и применения методов линеаризации, разделения переменных и малого параметра в целях ее интеграции.

Таким образом, вид (2.3) искомого преобразования задачи дает решение V_* системы (2.11) со свойствами (2.1), (2.2). При этом интеграция подсистемы (2.5), сводимой к (2.7), проводится при $\eta=\eta^0$ независимо от подсистемы (2.6).

Поставим другую задачу — найти при неизвестных инвариантах системы (1.5) субканоническое преобразование, для которого интеграцию подсистемы (2.5) можно проводить отдельно от подсистемы (2.6).

Следствие 2: подсистема (2.5) не связана с (2.6), если величина (2.4) не зависит от ξ.

Действительно, из леммы для подсистем (2.5), (2.6) заключаем, что в этом случае (2.5) сводится к виду (2.7) преобразованием параметра $d\tau=w\,d\sigma$ и поэтому ее интеграция не связана с подсистемой (2.6).

Отсюда следует, что для решения этой задачи достаточно определить условия, которые дадут равенства $\partial H/\partial\xi=0$.

Легко убедиться в инвариантности искомых условий относительно допустимого выбора вида $v_j(\xi,\eta)$ при фиксированных функциях V, w. Это означает, что $\partial H/\partial\xi=0$ лишь в случае $\partial H^*/\partial v=0$, где $H^*(\tau,x,v(\xi,\eta),y,\eta)\equiv H(\tau,x,\xi,y,\eta)$. Из уравнений (2.6) для циклических ξ_j^* (при выборе $v\equiv\xi$) имеем, как и в общем случае, $\eta_j=\mathrm{const}$. Поэтому, не уменьшая общности, положим здесь $v_j(\xi,\eta)\equiv\xi_j$. Введем обозначения

$$N=\|n_{lk}\|,\quad n_{lk}=\frac{\partial^2 V}{\partial z'_l\,\partial q_k},\quad R=\|r_{kj}\|,\quad r_{kj}=\frac{\partial q_k}{\partial\xi_j}.$$

Продифференцировав по ξ_j соотношения (2.3), получим матричное равенство $R=N^{-1}I$, где

$$N^{-1}=\|n'_{lk}\|,\quad n'_{lk}=N_0^{-1}P(n_{kl}),\quad I=\left\|\begin{matrix}0\\ E^r_r\end{matrix}\right\|,$$

$P(n_{kl})$ — алгебраическое дополнение элемента n_{kl} в N, $N_0=\det N$, $r_{kj}=R_{kj}(n_{lk})$ — рациональные функции. Условия $\partial H/\partial\xi=0$ эквивалентны системе r уравнений

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial q_l}+c\left(\frac{\partial G}{\partial q_l}\right)+\left(\frac{\partial G}{\partial p_k}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial q_k\,\partial q_l}\right]r_{lj}=0, \qquad (2.12)$$

которым должна удовлетворять функция V. Тогда из следствия 2 и системы (2.12), где символ $(\partial G/\partial r_l)$ означает функции после подстановки $\xi=\partial V/\partial\eta$, $y=-w^{-1}\partial V/\partial x$, имеем утверждение, которое выражает

Теорема 2. *Если при* $c=c^*$ *существует решение* V^* *системы* (2.12), *удовлетворяющее условиям* (2.1), (2.2), *то оно определяет субканоническое преобразование* (2.3), *которое дает подсистему* (2.5), *интегрируемую отдельно от подсистемы* (2.6).

При этом функции $g_j(\tau,p,q)=\eta_j$ являются независимыми инвариантами, вид которых дает преобразование (2.3).

Замечания. Используемое здесь погружение системы (1.1) в систему (1.4) для учета случая субканонического преобразования времени в симметричной форме не является необходимостью и вполне заменимо соответствующей модификацией канонического преобразования вида [8]. Аналогично методу Якоби, эффективность условий двойного понижения порядка в теоремах 1 и 2 зависит от структуры инвариантов h_α и функции G. Для циклических координат q'', t исходной системы (1.1) такое понижение дается известными уравнениями Раута и Уиттекера. В последнем случае эволюция динамической системы со структурным свойством $\partial G''/\partial t=0$ и инвариантом $G''(q'',p'')$ определяется принципом Мопертюи. В связи с этим для неавтономных динамических систем интересно привести следующую модификацию принципа Мопертюи.

3. Рассмотрим $2n$-мерную с инвариантом $h(t,x,\dot x)$ динамическую систему S, эволюция которой выражается условиями стационарности функционала $\quad I=\int\limits_{t_0}^{t_*}M(t,x,\dot x)\,dt \quad$ при ограничении $h[t,x(t),\dot x(t)]=$ $=h(t_0,\ x(t_0),\ \dot x(t_0))=h_0$ и краевых условиях $x(t_0)=x_0$, $x(t_*)=x_1$. Предполагается, что t_0, x_0, x_1 — произвольны и фиксированы, t_* — не задано, определитель

$$D_1=|\partial^2(M+\lambda h)/\partial\dot x_k\,\partial\dot x_s|\neq 0 \quad \text{и} \quad \dot x_s\frac{\partial h}{\partial\dot x_s}\neq 0 \quad (k,s=\overline{1,n}).$$

Условия стационарности I имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot x}(M+\lambda h)\right]-\frac{\partial}{\partial x}(M+\lambda h)=0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\dot x\cdot\frac{\partial h}{\partial x}+\ddot x\cdot\frac{\partial h}{\partial\dot x}=0, \qquad (3.1)$$

$$\lambda_*[H_*(h)+h_0]+H_*(M)=0,$$

$$H(\Phi)\equiv\dot x\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\dot x}-\Phi,\qquad \Phi_*=\Phi(t_*,x(t_*),\ \dot x(t_*)),\ \lambda=\lambda(t).$$

Допустим также, что данная неавтономная система удовлетворяет структурным условиям, которые заменяют для M, h условия цикличности

$$\frac{\partial h}{\partial t}H(M)-[h+H(h)]\frac{\partial M}{\partial t}=0,\qquad c_1=\mathrm{const}\neq h^{-1}, \qquad (3.2)$$

$$(1-c_1h)\,[h+H(h)]^{-1}H(M)+c_1M=\dot V_1(t,x),\qquad V_1\in C_2.$$

Из первых $n+1$ уравнений системы (3.1) получаем, что множитель Лагранжа $\lambda(t)$ удовлетворяет уравнению

$$0=\dot\lambda+[H(h)+h]^{-1}\left\{\left[\frac{d}{dt}(H(h)+h)+\frac{\partial h}{\partial t}\right]\lambda+\frac{d}{dt}H(M)+\frac{\partial M}{\partial t}\right\},\tag{3.3}$$

которое в силу первого равенства (3.2) имеет решение

$$\lambda=\mu(t,x,\dot x)=-[h+H(h)]^{-1}H(M),\tag{3.4}$$

удовлетворяющее краевому условию в системе (3.1).

Определим для S функцию $L^*(t,x,\dot x)$ равенством

$$c_2L^*=M+\mu h+\dot V_2,\qquad V_2=V_2(t,x)\in C_2,\qquad c_2=\mathrm{const}\neq 0,\tag{3.5}$$

где $V_{1,2}(t,x)$ — произвольная функция. Отсюда имеем следующее утверждение.

Если $D_2=|\partial^2L^*/\partial\dot x_k\partial\dot x_s|\neq 0$, то система S — гамильтонова. В справедливости этого утверждения убеждаемся подстановкой выражения (3.5) в уравнение (3.1), которая приводит с учетом (3.2) к уравнениям Эйлера—Лагранжа, определяющим эволюцию системы S при $D_2\neq 0$. Функция $h(t,x,\partial H^*/\partial p)$ является инвариантом $h'(t,x,p)$ системы с гамильтонианом $H^*=H^*(t,x,p)=H(L^*)$. Этот вывод можно рассматривать как обращение принципа Мопертюи.

Обратно, пусть для данной функции H^* системы Гамильтона с инвариантом $h'(t,x,p)$ существует достаточно гладкое решение $M(t,x,\dot x)$ уравнений (3.2), (3.5) при μ, заданном равенством (3.4). Если $D_1\neq 0$, то $M(t,x,\dot x)$ будет подынтегральной функцией обобщенного принципа Мопертюи.

4. Примеры. Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему

$$\dot q=\partial G/\partial p,\qquad \dot p=-\partial G/\partial q,\qquad q=(q_s)^*,\qquad p=(p_k)^*,\tag{4.1}$$

$$G=1/2g_{sk}(t,q)p_sp_k+g_s(t,q)p_s+G_0(t,q),\qquad \|g_{sk}\|>0,$$

структура которой удовлетворяет условию [9]

$$\frac{\partial G}{\partial t}-u_k\frac{\partial G}{\partial q_k}+\dot u_kp_k-v=0,\tag{4.2}$$

содержащему заданные функции $u_k(t)$, $v(t)$ класса C_2.

В силу равенства (4.2) система (4.1) имеет инвариант

$$h'=F'=G+u_k(t)p_k-W\ (k,s=\overline{1,n}),\tag{4.3}$$

где $\quad g_{sk}(t,q)\equiv g_{sk}(x),\qquad g_s(t,q)\equiv f_s(x)-u_s(t),\qquad W=\int\limits_0^t v\,dt,$

$-W(t)+G_0(t,q)\equiv G_0(x),\ \ x=q+w,\ \ w=\int\limits_0^t u\,dt,\ f_s$ — некоторые функции класса C_2.

Функция $V(t,q,P)=x_kP_k-\int\limits_0^t W(\tau)\,d\tau$ определяет новые переменные

$$Q_k=\partial V/\partial P_k=q_k+w_k=x_k,$$
$$p_k=\partial V/\partial q_k=P_k,$$

$$H = G + \partial V/\partial t = G + u_k p_k - W(t) = F',$$

в которых система (4.1) с инвариантом (4.3) примет вид канонических уравнений

$$\dot{x} = \partial F'/\partial p, \quad \dot{p} = -\partial F'/\partial x, \tag{4.4}$$
$$(\dot{F}' = \partial F'/\partial t = 0).$$

Обозначим решение уравнения $F'(x, p) + h^0 = 0$ относительно p_1 через $-K(x, p_2, \ldots, p_r, h^0)$. Отсюда имеем систему Уиттекера

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx_1} = -\frac{\partial K}{\partial x_i}, \tag{4.5}$$

$$\frac{dt}{dx_1} = \frac{\partial K}{\partial h^0}, \quad h^0 = \mathrm{const}, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

в которой первые $2(n-1)$ уравнений имеют вид (2.7) и интегрируются независимо от двух последних. Неавтономная система (4.1) со свойством (4.2) служит примером реализации условий понижения размерности системы, полученных в п. 2. В работе [9] приводятся примеры механических систем (гиростатов), для которых условие (4.2) выполнено. С помощью инварианта (4.3) размерность этих систем, согласно примеру, можно уменьшить на две единицы. Существенно отметить, что при этом система (4.1) не обязана быть натуральной.

Примером выполнения условий п. 3 является система Мопертюи—Лагранжа

$$M = 2T = a_{ks}(x)\dot{x}_k\dot{x}_s, \quad L = T + U,$$

$$U = U(x), \quad x = (x_k)^*, \quad k, s = \overline{1, n}.$$

Так как инвариант движения $h = T - U$ и функция M не зависят от t, то условие (3.2) выполнено. Для этой системы по формуле (3.4) находим $\mu = -1$. Тогда равенство (3.5) удовлетворяется. Поэтому оба утверждения п. 3 справедливы в этом примере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Синг Дж. Л., Классическая механика, М., 1963.
2. Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, М., 1947.
3. Парс Л. А., Аналитическая динамика, М., 1971.
4. Гантмахер Ф. Р., Лекции по аналитической механике, М., 1966.
5. Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, М., 1947.
6. Валле-Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, т. II, М., 1949.
7. Леви-Чивита Т., Амальди У., Курс теоретической механики, т. II, ч. 2, М., 1951.
8. Новоселов В. С., Механика твердого тела, № 5, 16 (1974).
9. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, 277 (1975).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24/VI 1975

I. KEIS

SUBKANOONILISEL TEISENDUSEL INVARIANTE OMAVATE HAMILTONI SÜSTEEMIDE JÄRGU ALANDAMISEST

Vaadeldakse üldistatud kanoonilist (subkanoonilist) teisendust, mis muudab esialgse dünaamilise süsteemi kaheks alamsüsteemiks. Esimesel süsteemil on kanooniline kuju, kui teise süsteemi impulsid on invariantsed. Teoreemidega 1 ja 2 on kindlaks määratud piisavad tingimused $2(n-r)$-mõõtmelise kanoonilise alamsüsteemi saamiseks nii etteantud kui ka tundmatute invariantide korral. On saadud Maupertuis' printsiibi pöördprintsiip mõnede tuntud invariantidega süsteemide jaoks. Määratakse tingimused, mille korral Hamiltoni süsteemi võib esitada Maupertuis' süsteemina. Tuuakse näide mõningate mitteautonoomsete Hamiltoni süsteemide (hamiltoniaani ja impulsside lineaarsete kombinatsioonide) järgu alandamise kohta.

I. KEIS

DIMENSION REDUCTION VIA SUBCANONICAL TRANSFORM OF HAMILTONIAN SYSTEMS WITH INVARIANTS

Subcanonical transform reducing initial system to special combination of two subsystems is introduced in the paper. The first one becomes canonical when the impulses of the second system are invariants. Existence conditions of subcanonical transform resulting in a $2r$-dimension reduction of the system are proved in theorems 1, 2. Maupertuis' inverse principle for the system with invariant is put forward. Conditions when the Hamiltonian system can be treated as Maupertuis' system are also determined.