EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.02

УДК 518.12

Г. ВАЙНИККО, Л. КАРПЕНКО, А. ШИЛМАН

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

1. Введение

В данной работе дается алгоритм решения уравнения вида

$$x(t)=\int_0^H \sum_{j=1}^n a_j e^{-b_j|t-s|} x(s)\,ds+a_0 e^{b_0 t}, \tag{1}$$

где
$$a_j, b_j>0,\ b_0\neq\pm b_j\ \ (j=1,\ \ldots,\ n),$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{b_j}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{2}$$

К уравнению (1) можно прийти, приближенно решая, например, одно из основных уравнений теории переноса излучения в однородной среде — уравнение Милна (см. [1])

$$x(t)=\frac{\lambda}{2}\int_0^H E(|t-s|)\,x(s)\,ds+a_0 e^{b_0 t}. \tag{3}$$

Здесь $\lambda (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ — вероятность выживания кванта излучения при столкновении с частицей среды,

$$E(t)=\int_1^\infty \frac{e^{-ts}}{s}\,ds=\int_0^1 \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}}\,d\mu$$

— интегральная экспонента. При изучении переноса излучения в неоднородной среде (в разорванной облачности) вместо (3) становится справедливым (см. [2]) уравнение вида

$$x(t)=\int_0^H [l_1 E(\lambda_1|t-s|)+l_2 E(\lambda_2|t-s|)]\,x(s)\,ds+a_0 e^{b_0 t}. \tag{3'}$$

Функция $E(t)$ в ходе решения уравнения (3) или (3'), как правило, сглаживается ввиду наличия у нее логарифмической особенности при $t=0$. Один из возможных путей заключается в замене интеграла в определении $E(t)$ какой-нибудь квадратурной формулой

$$\int_0^1 f(\mu)\,d\mu \approx \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(\mu_j),\ 0<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_n\leqslant 1,\ \alpha_j>0,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1.$$

Таким образом,

$$E(t)\approx\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j}{\mu_j}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\mu_j}}$$

и, например, уравнение (3) заменяется уравнением (1), в котором

$$a_j=\frac{\lambda}{2}\frac{\alpha_j}{\mu_j},\quad b_j=\frac{1}{\mu_j}\quad (j=1,\ \ldots,\ n).$$

Заметим, что условие (2) здесь выполняется: из $\lambda\leqslant 1$ следует

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j}=\frac{\lambda}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=\frac{\lambda}{2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

При этом случаю $\lambda=1$ (непоглощающая среда) соответствует равенство в (2). Поэтому критический случай

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j}=\frac{1}{2} \tag{2'}$$

представляет особый интерес.

Условие (2) гарантирует однозначную разрешимость уравнения (1) и равномерную сходимость метода последовательных приближений. Действительно, норма интегрального оператора T уравнения (1) в пространстве $C[0,H]$ непрерывных на $[0,H]$ функций вычисляется по формуле (см. [3])

$$\|T\|=\max_{0\leqslant t\leqslant H}\int_0^H\sum_{j=1}^{n}a_j\,\mathrm{e}^{-b_j|t-s|}ds=\int_0^H\sum_{j=1}^{n}a_j\,\mathrm{e}^{-b_j\left|\frac{H}{2}-s\right|}ds,$$

откуда

$$\|T\|<2\int_0^\infty\sum_{j=1}^{n}a_j\,\mathrm{e}^{-b_js'}ds'=2\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{b_j}\leqslant 1.$$

В пользу метода последовательных приближений для уравнения (1) говорит и то, что в принципе все интегрирования при начальном приближении $x_0(t)=a_0\mathrm{e}^{b_0t}$ удается провести точно без привлечения квадратурных формул. Однако точный счет громоздок, и при выполнении равенства (2') сходимость последовательных приближений очень медленная, особенно при больших H (при $H\to\infty$ попадаем на спектр).

В [4] разработан метод механических квадратур решения уравнения (1) — интеграл в уравнении (1), в свою очередь, заменяется какой-нибудь квадратурной формулой.

Предлагаемый ниже метод решения уравнения (1) нам представляется более эффективным, особенно при небольших n.

2. Решение уравнения (1)

Посмотрим, как действует интегральный оператор T уравнения (1) на экспоненциальные функции. При $d\neq b_j,\ -b_j$ ($j=1,\ \ldots,\ n$) несложный счет дает

$$T\,e^{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{2a_j b_j}{d^2 - b_j^2} e^{dt} - \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{d + b_j} e^{-b_j t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\, e^{(d-b_j)H}}{d - b_j} e^{b_j t}, \qquad (4)$$

т. е., применяя T к функции e^{dt}, получаем ту же функцию (с новым коэффициентом) и еще $2n$ экспоненциальные функции вида $e^{b_j t}$ и $e^{-b_j t}$, которые оператор T переводит в более сложные. Сказанное (а также некоторые другие соображения) наводит на мысль искать решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = c_0\, e^{b_0 t} + \sum_{k=1}^{2n} c_k\, e^{d_k t} \qquad (5)$$

с неизвестными пока c_k и d_k, но такими, что $|d_k| \neq b_j$ ($k = 1, \ldots, 2n$; $j = 1, \ldots, n$). Вопрос о существовании решения в указанной форме решается подстановкой (5) в уравнение (1) и приравниванием после применения формулы (4) коэффициентов при линейно независимых функциях $e^{b_0 t}$, $e^{\pm b_j t}$, $e^{d_k t}$. В результате приходим к следующим условиям на c_k и d_k:

$$a_0 - \sum_{j=1}^{n} \frac{2a_j b_j}{b_0^2 - b_j^2} = c_0, \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2n} \frac{c_k}{d_k + b_j} + \frac{c_0}{b_0 + b_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n), \\ &\sum_{k=1}^{2n} \frac{c_k\, e^{(d_k - b_j)H}}{d_k - b_j} + \frac{c_0\, e^{(b_0 - b_j)H}}{b_0 - b_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

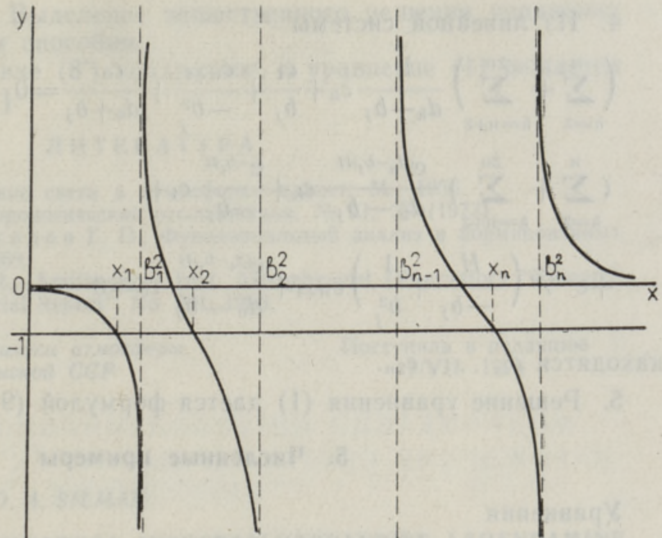
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2a_j b_j}{d_k^2 - b_j^2} = -1 \qquad (k = 1, \ldots, 2n). \qquad (8)$$

Из (6) однозначно определяется c_0. Если $d_1, \ldots, d_{2n}$ уже найдены, и они попарно различны, $|d_k| \neq b_j$, то $c_1, \ldots, c_{2n}$ легко находятся из линейной системы (7). Условия (8) говорят о том, что вместе с d_k в решение (5) входит и $-d_k$, причем $x_k = d_k^2$ ($k = 1, \ldots, n$) определяются из уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{2a_j b_j}{x - b_j^2} + 1 = 0. \qquad (8')$$

Из условия (2) следует, что (8') имеет ровно n попарно различных вещественных неотрицательных решений $x_1, \ldots, x_n$. Действительно, умножением на $(x - b_1^2) \ldots (x - b_n^2)$ левая часть уравнения преобразуется к многочлену степени n, а значит, существует не более n решений. С другой стороны, из поведения функции $y = \sum_{j=1}^{n} \frac{2a_j b_j}{x - b_j^2}$ ясно (см. рисунок), что уравнение (8') имеет решение в каждом из интервалов* $[(0, b_1^2), (b_1^2, b_2^2), \ldots, (b_{n-1}^2, b_n^2)]$. При этом, если в (2) выполняется строгое неравенство, все решения $x_1, \ldots, x_n$ положительны, если же имеет место равенство (2'), то одно решение нулевое, остальные положительные.

* Здесь мы считаем, что $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$.



Вид функции

$$y=\sum_{j=1}^{n}\frac{2a_jb_j}{x-b_j^2}$$

(к решению уравнения (8')).

3. Случай поглощающей среды (строгое неравенство в (2))

В этом случае на основе изложенного получаем следующий алгоритм решения уравнения (1).

1. Составляется уравнение (8'). Методом Ньютона (или каким-нибудь другим итерационным методом) находятся его положительные решения $x_1, \ldots, x_n$. За начальные приближения принимаются соответственно $\frac{1}{2}b_1^2, \frac{1}{2}(b_1^2+b_2^2), \ldots, \frac{1}{2}(b_{n-1}^2+b_n^2)$ или числа, получаемые решением квадратных уравнений, составленных из (8') с сохранением соответствующих двух членов.
2. Вычисляются $d_k=\sqrt{x_k}$, $d_{k+n}=-\sqrt{x_k}$ $(k=1, \ldots, n)$.
3. Из (6) определяется c_0.
4. Из линейной системы (7) находятся $c_1, \ldots, c_{2n}$.
5. Решение уравнения (1) дается формулой (5).

4. Случай непоглощающей среды (равенство (2'))

В этом случае, как уже отмечалось, первый из корней x_k $(k=1, \ldots, n)$ равен нулю, вместе с ним $d_1=d_{n+1}=0$, определитель системы (7) равен нулю, и алгоритм п. 3 не срабатывает.

Решение уравнения (1) следует разыскивать в виде

$$x(t)=c_0\,\mathrm{e}^{b_0t}+c_1+c_{n+1}t+\Big(\sum_{j=2}^{n}+\sum_{j=n+2}^{2n}\Big)c_k\,\mathrm{e}^{d_kt}. \qquad (9)$$

Повторяя выкладки п. 2, приходим к следующему алгоритму.

1. Составляется уравнение (8'). Методом Ньютона (или каким-нибудь другим итерационным методом) находятся его положительные решения $x_2, \ldots, x_n$. За начальные приближения выбираются соответственно числа $\frac{1}{2}(b_1^2+b_2^2), \ldots, \frac{1}{2}(b_{n-1}^2+b_n^2)$.
2. Вычисляются $d_1=d_{n+1}=0$, $d_k=\sqrt{x_k}$, $d_{k+n}=-\sqrt{x_k}$ $(k=2, \ldots, n)$.
3. Из (6) определяется c_0.

4. Из линейной системы

$$\left(\sum_{k=2}^{n}+\sum_{k=n+2}^{2n}\right)\frac{1}{d_k+b_j}c_k+\frac{c_1}{b_j}+\frac{c_{n+1}}{-b_j^2}+\frac{c_0}{d_0+b_j}=0 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n),$$

$$\left(\sum_{k=2}^{n}+\sum_{k=n+2}^{2n}\right)\frac{e^{(d_k-b_j)H}}{d_k-b_j}c_k+\frac{e^{-b_jH}}{-b_j}c_1+$$

$$+e^{-b_jH}\left(\frac{H}{-b_j}+\frac{1}{b_j^2}\right)c_{n+1}+\frac{e^{(d_0-b_j)H}}{d_0-b_j}c_0=0 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n)$$

находятся $c_1, \ldots, c_{2n}$.

5. Решение уравнения (1) дается формулой (9).

5. Численные примеры

Уравнения

$$x(t)=\frac{\lambda}{2}\int_0^1 E(|t-s|)\,x(s)\,ds+a_0\,e^{b_0 t}, \quad a_0=\frac{1}{4}, \quad b_0=3 \tag{10}$$

и

$$x(t)=\frac{3}{2}\int_0^1 E(3\,|t-s|)\,x(s)\,ds+a_0\,e^{b_0 t},$$

$$a_0=e^{-3,4642}, \quad b_0=3,4642 \tag{11}$$

заменялись уравнениями вида (1) указанным в п. 1 способом, при этом использовалась формула средних прямоугольников для разных n. Уравнение (10) решалось по алгоритму п. 3 при различных $\lambda<1$, а уравнение (11), соответствующее критическому случаю, — по алгоритму п. 4. Некоторые результаты расчетов, выполненных на ЭВМ «Минск-32», приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Решение уравнения (10) при $\lambda = 0,4$

t	$x(t)$	
	$n=5$	$n=10$
0	0,9391	0,9388
0,1	1,2229	1,2280
0,2	1,5176	1,5194
0,3	1,8482	1,8482
0,4	2,2341	2,2328
0,5	2,6937	2,6907
0,6	3,2464	3,2413
0,7	3,9124	3,9065
0,8	4,7026	4,7058
0,9	5,6008	5,6336

Таблица 2

Решение уравнения (11)

t	$x(t)$	
	$n=4$	$n=6$
0	0,5219	0,5208
0,1	0,8674	0,8665
0,2	1,1552	1,1523
0,3	1,4268	1,4232
0,4	1,6870	1,6828
0,5	1,9335	1,9290
0,6	2,1598	2,1552
0,7	2,3534	2,3487
0,8	2,4902	2,4849
0,9	2,5087	2,5084

6. Замечания

1. Алгоритм решения уравнения (1) несложно получить и тогда, когда (2) нарушается. В таком случае уравнение (8') имеет $n-1$ положительных решений и одно отрицательное x_1, которому соответствуют

два числа $d_k = \pm i \sqrt{|x_1|}$. Выделение вещественного решения уравнения (1) происходит обычным способом.

2. При $n = 1$ уравнение (8') квадратное, и уравнение (1) решается точно, что известно из [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев В. В., Рассеяние света в атмосферах планет, М., 1956.
2. Вайникко Г. М., Метеорологические исследования, № 21, 38 (1973).
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.
4. Arett E. H., Loeser R., Smithsonian Inst. Astrophysical Observatory "Research in Space Science. Special Report", No. 201, 1966.

Институт астрофизики и физики атмосферы
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
7/VII 1975

G. VAINIKKO, L. KARPENKO, A. SILMAN

EKSPONENTSIAALSETE TUUMADEGA INTEGRAALVÕRRANDITE LAHENDAMINE

Esitatakse võrrandi (1) lahendusalgoritm. Lahendit otsitakse kujul (5), suurused c_k ja d_k määratakse süsteemist (7) ja võrrandist (8). On käsitletud neelava ja mitteneelava keskkonna juhtu.

G. VAINIKKO, L. KARPENKO, A. SHILMAN

SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS WITH EXPONENTIAL KERNELS

In the present paper we give an algorithm for solving the equation (1). The solution is presented in the form (5) where the unknown quantities c_k, d_k are found from the system (7) and the equation (8). We have considered the algorithms in the case of absorbing as well as nonabsorbing media.