EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.2.01

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН, В. АРРО, Ю. ГИРШОВИЧ

НАИЛУЧШИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ

Квадратурная формула с остатком $R_n(f)$ называется наилучшей на множестве H функций $f(x)$, если ее узлы и веса выбраны так, что величина

$$\sup_{f\in H}|R_n(f)|$$

достигает наименьшего значения [1]. Ниже рассматриваются задачи построения некоторых наилучших квадратурных формул, в частности, формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)+R_n(f). \tag{1}$$

Используем следующие обозначения:
$g(x,t)$ — функция Грина для задачи

$$\begin{cases} y^{(2r)}=\varphi(x), \\ y(0)=y(1)=y^{(2i-1)}(0)=y^{(2i-1)}(1)=0 \quad (i=1,\ \ldots,\ r-1); \end{cases}$$

$W^{(2r)}L_2$ — множество заданных на отрезке $[0,1]$ функций $f(x)$, у которых $(2r-1)$-я производная абсолютно непрерывна, а производная порядка $2r$ удовлетворяет условию

$$\left(\int_0^1 |f^{(2r)}(x)|^2 dx\right)^{1/2}\leqslant M,$$

где M — заданное число;
$W_g^{(2r)}L_2$ — множество функций $f(x)$, принадлежащих множеству $W^{(2r)}L_2$ и удовлетворяющих условиям

$$f(0)=f(1)=f^{(2i-1)}(0)=f^{(2i-1)}(1)=0 \quad (i=1,\ \ldots,\ r-1). \tag{2}$$

Найдем наилучшую на множестве $W_g^{(2r)}L_2$ формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\alpha_r f^{(2r-1)}(0)+\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)+\beta_r f^{(2r-1)}(1)+R_n(f). \tag{3}$$

Легко проверить [2], что

$$g(x,t)=\frac{(x-t)^{2r-1}}{(2r-1)!}E(x-t)-H(x,t), \tag{4}$$

где

$$H(x,t)=\sum_{i=1}^{r-1}\lambda_i(t)\,x^{2i}+\lambda_r(t)\,x^{2r-1}, \tag{5}$$

а функции

$$\lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_r(t)$$

выбраны из условия

$$H(1,t)=\frac{(1-t)^{2r-1}}{(2r-1)!},\qquad H^{(2j-1)}_{x^{2j-1}}(1,t)=\frac{(1-t)^{2r-2j}}{(2r-2j)!}\qquad (j=1,\ \ldots,\ r-1);$$

$$E(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0\\ 1, & u>0.\end{cases}$$

Функция $f(x)$, принадлежащая множеству $W_g^{(2r)}L_2$, допускает представление

$$f(x)=\int_0^1 f^{(2r)}(t)\,g(x,t)\,dt.$$

Подставляя это представление в (3) и учитывая (4) и (5), получаем

$$R_n(f)=\int_0^1 f^{(2r)}(t)\,K(t)\,dt, \tag{6}$$

где

$$K(t)=\int_0^1 g(x,t)\,dx-\sum_{k=1}^{n}A_k g(x_k,t)+$$
$$+(2r-1)!\,\alpha_r\lambda_r(t)-\beta_r[1-(2r-1)!\,\lambda_r(t)\,]. \tag{7}$$

Применение к (6) неравенства Буняковского дает неравенство

$$|R_n(f)|\leqslant M\Big(\int_0^1|K(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x)=\int_0^1 K(t)\,g(x,t)\,dt. \tag{9}$$

Так как для функции

$$f_0(x)=M\varphi(x)/\|K(t)\|_{L_2},$$

принадлежащей множеству $W_g^{(2r)}L_2$, неравенство (8) превращается в равенство, то этим

$$\sup_{f\in W_g^{(2r)}L_2}|R_n(f)|=M\Big(\int_0^1|K(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}. \tag{10}$$

Итак, для построения наилучшей формулы (3) ее узлы и веса нужно выбрать так, чтобы величина

$$U=\int_0^1|K(t)|^2\,dt \tag{11}$$

приняла наименьшее значение.

Для решения этой задачи рассмотрим подробнее функцию (9). Из свойств функции Грина сразу следует, что

$$\varphi^{(2r)}(t)=K(t), \tag{12}$$

1°. $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi^{(2i-1)}(0)=\varphi^{(2i-1)}(1)=0 \quad (i=1, \ldots, r-1).$

Так как оператор

$$\begin{cases} y^{(2r)} \\ y(0)=y(1)=y^{(2i-1)}(0)=y^{(2i-1)}(1)=0 \quad (i=1, \ldots, r-1) \end{cases}$$

является самосопряженным, то $g(x,t)=g(t,x)$, и, следовательно, $g(x,t)$ как функция от t удовлетворяет условиям 1°, поэтому

$$g_{t^{2i-1}}^{(2i-1)}(x,0)=g_{t^{2i-1}}^{(2i-1)}(x,1)=0 \quad (i=1, \ldots, r-1). \tag{13}$$

В то же время из равенства $g(x,t)=g(t,x)$ по (4) имеем

$$g(x,t)=\frac{(t-x)^{2r-1}}{(2r-1)!}E(t-x)-\sum_{i=1}^{r-1}\lambda_i(x)t^{2i}-\lambda_r(x)t^{2r-1}. \tag{14}$$

Так как для всех $t>0$

$$g(0,t)=g_{x^{2i-1}}^{(2i-1)}(0,t)=0 \quad (i=1, \ldots, r-1),$$

то из (14) следует, что

$$\lambda_r(0)=\frac{1}{(2r-1)!}, \tag{15}$$

$$\lambda_r^{(2i-1)}(0)=0 \quad (i=1, \ldots, r-1). \tag{16}$$

Аналогично получаем, что

$$\lambda_r(1)=\lambda_r^{(2i-1)}(1)=0 \quad (i=1, \ldots, r-1). \tag{17}$$

Учитывая (13), (16) и (17), по (7) и (12) имеем

2°. $\varphi^{(2r+2i-1)}(0)=\varphi^{(2r+2i-1)}(1)=0 \quad (i=1, \ldots, r-1).$

Из (7) и (12) следует, что функция $\varphi(t)$ представима в виде

$$\varphi(t)=\frac{t^{4r}}{(4r)!}+P_{4r-1}(t)+\sum_{k=1}^{n}\mu_k(x_k-t)^{4r-1}E(x_k-t), \tag{18}$$

где $P_{4r-1}(t)$ — некоторый многочлен степени $4r-1$. Но тогда

3°. Функция $\varphi(t)$ имеет на отрезке $[0,1]$ непрерывную производную порядка $4r-2$ и на каждом отрезке $[0,x_1)$, $[x_1,x_2)$, ..., $[x_n,1]$ есть многочлен степени $4r$ со старшим коэффициентом $1/(4r)!$.

Из условий

$$U'_{A_k}=U'_{x_k}=0 \quad (k=1, \ldots, n),$$
$$U'_{\alpha_r}=U'_{\beta_r}=0$$

минимума величины (11) непосредственно вытекает следующее свойство соответствующей наилучшей формуле (3) функции $\varphi(x)$:

4°. $\varphi(x_k)=\varphi'(x_k)=0 \quad (k=1, \ldots, n),$

$\varphi^{(2r-1)}(0)=\varphi^{(2r-1)}(1)=0.$

Пусть теперь

$$z_k = kH \quad (k=0, 1, \ldots, n+1),\ H=\frac{1}{n+1},$$

$Q(x)$ — функция, которая на каждом отрезке $[z_i, z_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n)$ совпадает с функцией

$$\frac{H^{4r}}{(4r)!}\left[B\left(\frac{x-z_i}{H}\right)-B_{4r}\right],$$

где $B_m(x)$ — многочлен Бернулли степени m, $B_m = B_m(0)$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $Q(x)$ удовлетворяет условиям 1°—4°, если положить $x_i = z_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Так как по теореме И. Шёнберга и С. Карлина [3]* существуют единственный набор узлов $0 \leqslant x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1$ и соответствующая ему функция (18), для которой выполнены условия 1°—4°, то отсюда имеем следующее: узлами наилучшей формулы (3) являются значения

$$x_k = \frac{k}{n+1} \quad (k=1,\ldots,n), \tag{19}$$

а функция $\varphi(x)$, соответствующая наилучшей формуле (3), совпадает с $Q(x)$. Но тогда по (12)

$$K(t) = Q^{(2r)}(t). \tag{20}$$

Ввиду того, что $g_{t^{2r-1}}^{(2r-1)}(x, x+0) - g_{t^{2r-1}}^{(2r-1)}(x, x-0) = 1$, имеем

$$A_k = K^{(2r-1)}(x_k - 0) - K^{(2r-1)}(x_k+0) \quad (k=1,\ldots,n).$$

Отсюда и по (20) получаем веса наилучшей формулы (3)

$$A_k = H = \frac{1}{n+1} \quad (k=1,\ldots,n). \tag{21}$$

По (7) с учетом (15), (17) и того, что $g(x,0) = g(x,1) = 0$, имеем

$$K(0) = \alpha_r, \quad K(1) = -\beta_r.$$

Но тогда по (20) получаем значения весов

$$\alpha_r = -\beta_r = \frac{B_{2r}}{(n+1)^{2r}(2r)!}. \tag{22}$$

Итак, узлы и веса наилучшей формулы (3) найдены. Найдем точную оценку ошибки этой формулы. По (11) и (20)

$$U = \sum_{i=0}^{n}\int_{z_i}^{z_{i+1}}\left[\frac{H^{2r}}{(2r)!}\right]^2 B_{2r}^2\left(\frac{x-z_i}{H}\right)dx =$$

$$= \frac{H^{4r+1}}{[(2r)!]^2}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 B_{2r}^2(u)\,du = \frac{-B_{4r}}{(n+1)^{4r}\cdot(4r)!},$$

и поэтому по (10)

---

* Доказательство этой теоремы см. в [4].

$$\sup_{f\in W_g^{(2r)}L_2} |R_n(f)| = \frac{M}{(n+1)^{2r}}\sqrt{\frac{-B_{4r}}{(4r)!}}. \tag{23}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Единственная наилучшая на множестве* $W_g^{(2r)}L_2$ *квадратурная формула* (3) *имеет узлы* (19), *веса* (21) *и* (22), *оценку остатка* (23).

Введем следующие множества функций:

$$W_{01}^{*(2r)}L_2 = \{f(x): f\in W_g^{(2r)}L_2, f^{(2r-1)}(0) = f^{(2r-1)}(1) = 0\}, \tag{24}$$

$$\overline{W}_{01}^{(2r)}L_2 = \{f(x): f\in W^{(2r)}L_2, f^{(2i-1)}(0) = f^{(2i-1)}(1) = 0 \quad (i=1, \ldots, r)\}, \tag{25}$$

$$\tilde{W}_{01}^{(2r)}L_2 = \{f(x): f\in W^{(2r)}L_2, f^{(2i-1)}(0) = f^{(2i-1)}(1) \quad (i=1, \ldots, r)\}. \tag{26}$$

Из теоремы 1 и работы [5] получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Единственная наилучшая на множестве* $W_{01}^{*(2r)}L_2$ *квадратурная формула* (1) *имеет узлы* (19), *веса* (21), *оценку остатка, равную значению* (23).

Из теоремы 2 и [5] следует

Теорема 3. *Единственная наилучшая на множестве* $\overline{W}_{01}^{(2r)}L_2$ *квадратурная формула*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = Bf(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + Cf(1) + R_n(f) \tag{27}$$

имеет узлы (19), *веса* (21) *и*

$$B = C = \frac{1}{2(n+1)}, \tag{28}$$

оценку остатка, равную значению (23).

Теорема 4. *Единственная наилучшая на множестве* $\tilde{W}^{(2r)}L_2$ *квадратурная формула* (27) *имеет узлы* (19), *веса* (21) *и* (28), *оценку ошибки, равную значению* (23).

Доказательство. Из теоремы 3 и [5] следует, что единственной наилучшей на множестве $W^{(2r)}L_2$ формулой вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = Bf(0) + \sum_{i=1}^r \alpha_i f^{(2i-1)}(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + Cf(1) +$$
$$+ \sum_{i=1}^r \beta_i f^{(2i-1)}(1) + R_n(f)$$

является формула Эйлера—Маклорена. Как известно (напр., [6]), веса этой формулы удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_i = -\beta_i \quad (i=1, \ldots, r).$$

Тем более формула Эйлера—Маклорена является единственной наилучшей на множестве $W^{(2r)}L_2$ среди всех формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = Bf(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + Cf(1) + \sum_{i=1}^r \gamma_i \left(f^{(2i-1)}(0) - f^{(2i-1)}(1)\right) + R_n(f).$$

Отсюда и из [5] следует утверждение теоремы.

Замечание. Экстремальное свойство формулы Эйлера—Маклорена изучалось И. Шёнбергом [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.
2. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, М., 1969.
3. Karlin S., Approximation with special emphasis on spline functions, New York—London, 1969.
4. Karlin S., Micchelli C., Israel J. math., 405 (1972).
5. Гиршович Ю., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 25, 201 (1976).
6. Schoenberg I. J., Theory and applications of spline functions, New York—London, 1969, p. 157.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 31/III 1975

M. LEVIN, V. ARRO, J. GIRŠOVITŠ

MÕNEDE FUNKTSIOONIHULKADE PARIMAD KVADRATUURVALEMID

On tuletatud parimad kvadratuurvalemid (3), (1), (27) ja (27) vastavalt funktsioonihulkadele $\overset{(2r)}{W}_g L_2$ (2), $\overset{*(2r)}{W}_{01} L_2$ (24), $\overset{(2r)}{\overline{W}}_{01} L_2$ (25) ja $\overset{(2r)}{\mathring{W}}_{01} L_2$ (26).

M. LEVIN, V. ARRO, Y. GIRSHOVICH

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAE FOR SOME SETS OF FUNCTIONS

For sets of functions $\overset{(2r)}{W}_g L_2$ (2), $\overset{*(2r)}{W}_{01} L_2$ (24), $\overset{(2r)}{\overline{W}}_{01} L_2$ (25) and $\overset{(2r)}{\mathring{W}}_{01} L_2$ (26) the optimal quadrature formulae (3), (1), (27), (27), resp., are constructed.