EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.2.16

УДК 517.948 : 513.88.518

О. ВААРМАНН

ОБ УСКОРЕНИИ МЕТОДОВ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ПСЕВДООБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

O. VAARMANN. PSEUDOPÖÖRDOPERAATORI JÄRKJÄRGULISEL APROKSIMEERIMISEL PÕHINEVATE MEETODITE KIIRENDAMISEST

O. VAARMANN. ON ACCELERATION OF METHODS WITH SUCCESIVE APPROXIMATION OF PSEUDOINVERSE OPERATOR

Пусть $F(x)$ дифференцируемый оператор из одного гильбертова пространства H_1 в другое H_2 и производная $F'(x)$ имеет замкнутую область значений $R(x)=R(F'(x_k))$, а P_k и P_k^* — соответственно операторы ортогональной проекции H_2 на $R(F'(x_k))$ и H_1 на $R([F'(x_k)]^*)$.

Для решения уравнения

$$[F'(x)]^*F(x)=0 \tag{1}$$

рассмотрим итерационный метод

$$x_{k+1}=x_k-A_kF(x_k), \tag{2}$$

$$A_{k+1}=2A_k-A_kF'(x_{k+1})A_k, \tag{3}$$

где $A_0=A_0P_0=\overset{*}{P_0}A_0$. Линейные операторы A_k удовлетворяют условиям

$$\|P_k-F'(x_k)A_k\|\leqslant\overset{(i)}{\gamma_k}\quad(i=1,\ 2),\quad \|P_k-F'(x_k)A_{k-1}\|\leqslant\beta_{k-1},\quad \|A_k\|\leqslant\lambda_k,$$

где величины $\overset{(i)}{\gamma_k}$, β_{k-1} и λ_k $(k=1,2,\ldots)$ определяются рекуррентным способом (ср. [1]), $\gamma_k^{(1)}=\beta_{k-1}^2+(1+\beta_{k-1})L_2r_1$, если $R(x)\subset R(x_0)$, и $\gamma_k^{(2)}=\beta_{k-1}^2$, если $R(x)\supseteq R(x_0)$, а

$$\beta_k=\overset{(1)}{\gamma_k}+(\lambda_kL_2+\overset{2}{\lambda_k}L)\|P_0F(x_k)\|,\quad \lambda_k=C(1+\overset{(i)}{\gamma_k})/(1-L_2r_i)\ (i=1,2),$$

$$L_2=CL+ML_1.$$

1. Согласно приведенной в [1] теореме 3, метод (2)—(3) сходится со сверхлинейной скоростью. Здесь, используя в основном обозначения [1], сформулируем более общую теорему о сходимости метода (2)—(3) и приведем некоторые его модификации.

Если $F'(x_0)$ и $[F'(x_0)]^+$ ограничены, то в предположениях теоремы легко показать, что $\|F'(x)\|\leqslant M$, $\|[F'(x)]^+\|\leqslant C$, где M и C — некоторые постоянные [2].

Введем обозначения

$$\delta_0^{(1)}=\gamma_0^{(1)}+\frac{L\lambda_k^2}{2}\|P_0F(x_0)\|,\quad \delta_0^{(2)}=d_0b_0,\quad b_0=\max\{\gamma_0^{(2)},\ \|P_0F(x_0)\|\},$$

$$d_0=(1+\lambda_0L_2+\lambda_0^2L)^2,\quad d=\left[1+\frac{CL_2}{1-L_2r_2}+\frac{C^2L}{(1-L_2r_2)^2}\right]^2,$$

$$\gamma_0^{(1)}=\max\{\beta_0^2+(1+\beta_0)L_2r_1,\ \|P_0-F'(x_0)A_0\|\},$$

$$\gamma_0^{(2)}=\max\{\beta_0^2,\|P_0-F'(x_0)A_0\|\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $x_0\in H_1$, $S=\{x\in H_1:\|x-x_0\|\leqslant\varrho\}$ *и на* S *выполнены следующие условия:*

1° *оператор* $F(x)$ *дифференцируем (по Фреше);*

2° *производная* $F'(x)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F'(x)-F'(y)\|\leqslant L\,\|x-y\|;$$

3° *существует* $[F'(x)]^+$ *и* $\|[F'(u)]^+-[F'(v)]^+\|\leqslant L_1\,\|u-v\|$;

4° $\delta=\delta_0^{(i)}<1$ $(i=1,2)$.

Тогда, 1) *если* $R(x)\subset R(x_0)$, $\beta_1=\gamma_1^{(1)}+(\lambda_1L_2+\lambda_1^2L)\ \|P_0F(x_0)\|\leqslant\beta_0$ *и* $r_1=\lambda_0\|P_0F(x_0)\|/(1-\delta)\leqslant\varrho$, *где* $\delta=\delta_0^{(1)}$, *то уравнение* $[F'(x)]^*F(x)=0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0-x^*\|\leqslant r_1$, *к которому сходится последовательность* (2)—(3), *причем*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant r_1\delta^k;$$

2) *если* $R(x)\supseteq R(x_0)$, $L_2r_2<1$ *и* $r_2=\lambda_0H_0(\delta)/d\leqslant\varrho$, *где* $\delta=\delta_0^{(2)}$, *и* $H_k(\delta)=\sum_{i=k}^{\infty}\delta^{2^i}$, *то уравнение* $[F'(x)]^*F(x)=0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0-x^*\|\leqslant r_2$, *к которому сходится последовательность* (2)—(3), *причем*

$$\|x_k-x^*\|\leqslant H_k(\delta)/d.$$

Доказательство этой теоремы с необходимыми изменениями аналогично доказательству теоремы 2 из [1].

Следствие. Если $U=F'(x)$ отображает H_1 на все пространство H_2, т. е. $U(H_1)=R(x)=H_2$, и U имеет не обратный, а лишь правый обратный оператор U_R^{-1}, то из теоремы 1 следует, что скорость сходимости метода (2)—(3) равна двум. Одним из правых обратных служит оператор $U^+=U^*(UU^*)^{-1}$.

Замечание. Методика доказательства теоремы 1 применима и тогда, когда $F(x)$ действует из одного банахова пространства в другое и существует $[F'(x)]^{-1}$. Для этого случая квадратичная скорость сходимости метода (2)—(3) к решению уравнения $F(x)=0$ доказана ранее [3–5].

2. Рассмотрим следующую модификацию метода (2)—(3):

$$x_{k+1}=x_k-B_kF(x_k), \tag{4}$$

$$A_{k+1}=2A_k-A_kF'(x_{k+1})A_k, \tag{5}$$

где $B_k=2A_k-A_kF'(x_k)A_k$ и, для простоты, случай $R(x)\supseteq R(x_0)$.

Положим

$$\bar{\lambda}_0 = C[1+(\gamma_0^{(2)})^2]/(1-L_2r_2),$$

$$\bar{d}_0 = (1+\bar{\lambda}_0 L_2 + \bar{\lambda}_0^2 L)^2, \qquad \bar{\delta}_0 = \bar{d}_0 b_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $x \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$ *и на* S *выполнены условия* 1°—3° *теоремы* 1, *а также условия*

$$\delta = \bar{\delta}_0 = (1+\bar{\lambda}_0 L_2 + \bar{\lambda}_0^2 L)^2 \ b_0 < 1,$$

$$L_2 r_2 < 1.$$

Тогда, если $R(x) \supseteq R(x_0)$ *и* $r_2 = \bar{\lambda}_0 H_0(\delta)/d \leqslant \varrho$, *то уравнение* $[F'(x_0)]^* F(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_2$, *к которому сходится последовательность* (4)—(5), *причем*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant H_k(\delta)/d.$$

Нетрудно показать, что имеет место соотношение $\|B_0\| \leqslant \bar{\lambda}_0 < \lambda_0$, и следовательно, $\bar{d}_0 < d_0$ и $\bar{\delta}_0 < \delta_0$. Таким образом, метод (4)—(5) дает лучшие оценки скорости сходимости, чем метод (2)—(3).

Вместо рекуррентной формулы (5) для определения A_k можно использовать некоторую другую формулу, например,

$$A_{k+1} = A_k + \alpha_{k+1}[F'(x_{k+1})]^*[I_2 - F'(x_{k+1})A_k] \tag{6}$$

либо

$$A_{k+1} = A_k + \alpha_{k+1}[I - F'(x_{k+1})A_k] \quad (\alpha_{k+1} > 0), \tag{7}$$

если $F'(x)$ — ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор из гильбертова пространства H в себя. В последнем случае было бы интересно сочетание формулы (4) со способом определения A_k в методах типа Флетчера—Пауэла. В качестве B_k можно принять также $A_k + \alpha_k[F'(x_k)]^* \ [I_2 - F'(x_k)A_k]$.

Итак, в некоторых случаях для повышения скорости сходимости метод типа (2)—(3) можно модифицировать за счет небольшого увеличения числа операций. Метод (4)—(5) применительно к решению нелинейных систем с n уравнениями и с n неизвестными требует на каждом шаге итерации на n^2 умножений больше, чем метод (2)—(3).

Пример. Найти точку x^* минимума функции Флетчера—Пауэла [6]

$$f(x) = f(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} (A_{ij} \sin x_j + B_{ij} \cos x_j - E_i) \Big\}^2,$$

где A_{ij}, B_{ij} — случайные числа из $[-100, +100]$, E_i — заданные константы, при $n = 3$ и 5.

Для этого применим следующие методы:

1° $x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)]^{-1} F(x_k)$,

2° $x_{k+1} = x_k - [F'(x_0)]^{-1} F(x_k)$,

3° а) $x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k)$,

б) $A_{k+1} = 2A_k - A_k F'(x_{k+1}) A_k$,

4° а) $x_{k+1} = x_k - [2A_k - A_k F'(x_k) A_k] F(x_k)$,

б) $A_{k+1} = 2A_k - A_k F'(x_{k+1}) A_k$,

5° а) $x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k)$,

б) $A_{k+1} = A_k + \alpha_{k+1}[I - F'(x_{k+1}) A_k]$,

6° а) $x_{k+1} = x_k - [2A_k - A_k F'(x_k) A_k] F(x_k)$,

б) $A_{k+1} = A_k + \alpha_{k+1}[I - F'(x_{k+1}) A_k]$,

где $\alpha_k = \dfrac{3}{2M_k}$, $M_k = \max\limits_i \sum \left|b_{ij}^{(h)}\right|$, $\{b_{ij}^{(h)}\} = F'(x_k)$. Приведем таблицу числа итераций N, необходимых для достижения заданной точности 10^{-6} при различных методах и различных исходных данных.

Таблица

Начальные приближения	Точные решения	1	2	3*а*	3*б*	4*а*	4*б*	5*а*	5*б*	6*а*	6*б*
—0,360999 2,805924 1,585096	—0,230745 2,824236 1,783884	6	—	—	10	—	8	18	23	13	17
—1,131226 0,026019 —2,944214	—1,014147 0,180878 —3,081409	5	17	6	8	5	6	9	12	6	8
—0,727873 2,569036 3,045859 1,097136 1,073563	—0,645664 2,587476 2,766424 0,971768 0,708586	6	24	7	9	9	7	9	12	7	10
2,204362 0,619486 —2,042630 —1,269885 1,138288	1,896938 0,621736 —1,786903 —1,417061 0,981142	5	29	6	10	6	9	11	28	11	20

Примечание. Буквы *а* и *б* при нумерации применяемых методов означают, что за начальное приближение A_k принято соответственно $[F'(x_0)]^{-1}$ и $\alpha_0 I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 265 (1970).
2. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **22**, 343 (1973).
3. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, 403 (1967).
4. Вержбицкий В. М., Цалюк З. Б., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **12**, № 1, 222 (1972).
5. Burmeister W., ZAMM, **52**, 101 (1972).
6. Fletcher R., Powell M. J. D., Comp. J., **6**, No. 2, 163 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25/IV 1974