EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.2.07

УДК 62–50

И. КЕЙС

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача оптимальной стабилизации движений неавтономных систем по всем (или части) переменных. Доказана теорема об условиях оптимальной управляемости локального и глобального характера. Получен обратный результат, соответствующий проблеме обращения [1,2]. Доказана лемма о времени перехода и лемма об условном быстродействии. Результаты иллюстрируются на примере систем с выпуклой функцией качества по управлению и норм-инвариантных систем [1,3].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=X+Mu, \tag{1.1}$$

где

$$x=(x_s)^{\mathrm{T}},\ X=(X_s(t,x))^{\mathrm{T}},\ X(t,0)\equiv 0,\ s=\overline{1,n},\ M=[m_{s\sigma}(t,x)],$$

$$\sigma=\overline{1,r},\ \text{ранг}\ M=r\leqslant n\ \text{для}\ R:t\geqslant 0,\ x\in E^n.$$

Класс допустимых управлений $\{\tilde{u}[t]\}$ составляют кусочно-непрерывные на $\Gamma:t\geqslant 0$ функции $\tilde{u}[t]$ из области

$$\Omega\cup 0\equiv\Omega_1:0\leqslant\omega(u)\leqslant\omega^0. \tag{1.2}$$

Функция $\omega(u)\subset C$ на E^r имеет свойства:

$$\omega(0)=0;\quad \omega(u)\in C_2,\quad \omega(u)>0,\quad u\neq 0; \tag{1.3}$$

$$|r|\,\omega(u)=\omega(ru)\ \text{для}\ r\in E^1,\ u\in E^r,\ \omega(u)=\langle u,\nabla\omega\rangle,\ u\neq 0; \tag{1.4}$$

$\omega(u)$ строго выпукла на нецентральном интервале

$$\lambda u_1+(1-\lambda)u_2,\qquad (0<\lambda<1) \tag{1.5}$$

когда u_1, u_2 линейно независимы.

Из свойств (1.3)—(1.5) следует [3], что Ω_1 — регулярный $(r>1)$ выпуклый компакт, граница которого $Fr\Omega_1$ замкнута и симметрична относительно нуля; $Fr\Omega_1\to\infty$ при $\omega^0\to\infty$. Можно [1,3] считать Ω_1 аппроксимацией гиперкуба или следствием возможности поворота рулей. Функции $X(t,x)$, $m(t,x)\subset C$ на R и таковы, что решения системы (1.1) существуют, единственны и бесконечно продолжаемы для $\tilde{u}[t]$.

Пусть система на R

$$\dot{x}=X(t,x) \tag{1.6}$$

имеет m информативных независимых непрерывных функций $h_i(t,x',x'')$, $f_j(t,x',x'')$, одновременно исчезающих тогда и только тогда, когда $x' = 0$. Здесь $x' = (x_\alpha)^{\mathrm{T}}$, $x'' = (x_\beta)^{\mathrm{T}}$; $\alpha = \overline{1,k}$; $\beta = \overline{k+1,n}$; $1 \leqslant k \leqslant n$; $a + b = m$; $i = \overline{1,a}$; $j = \overline{1,b}$; $1 \leqslant m \leqslant n$. Пусть h_i, $f_j \in C_2$ на R', где $R' = R/\{x' = 0\}$. Предположим, что на R выполняется оценка

$$r_1(x') \leqslant \Big(\sum_i h_i^2 + \sum_j f_j^2\Big)^{1/2} \leqslant r_2(x'), \tag{1.7}$$

где $r_1(x')$, $r_2(x') \subset C$, определенно положительны и бесконечно большие по x'. Принято, что система h_i, f_j дополнена системой функций $\zeta_l(t,x)$ $(l = \overline{1, n-m})$ гладкости h на R, для которой на области изменения $h, f, \zeta \to \bar{Q}$ определен изоморфизм $T^{-1}(t) : x'_\alpha = \xi'_\alpha(t,y,z)$, $\{\xi''_\beta(z)\} = E^{n-k}$, $x''_\beta = \xi''_\beta(t,y,z)$, обратный к $T(t) : y'_i = h_i(t,x)$, $y''_j = f_j(t,x)$, $z_l = \zeta_l(t,x)$. Пусть $x = 0 \leftrightarrow y = 0$, $z = 0$. Ясно, что $Q = \Gamma \times \bar{Q}$, где $\bar{Q} = D \times Z$, а области $D = (h_i, f_j)^{\mathrm{T}}$, $Z = (\zeta_l)^{\mathrm{T}}$. Из свойства (1.7) заключаем, что D — неограниченная подобласть E^m; $0 \in D$. Учитывая их гомеоморфность, принимаем для простоты $D = E^m$. Из оценки (1.7) следует, что на $v > 0$ есть положительные $\varrho_1(v) \leqslant \varrho_2(v)$, $\varrho_1(0) = \varrho_2(0) = 0$, $\lim\limits_{v\to+\infty} \varrho_1(v) = +\infty$, $\lim\limits_{v\to 0} \varrho_2(v) = 0$, для которых верны условия

$$\varrho_1(\|y\|) \leqslant \|x'\| \leqslant \varrho_2(\|y\|). \tag{1.8}$$

Из оценки (1.8) видно, что $\|x'\| \to 0$ при $\|y\| \to 0$ и $\|x'\| \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$. Свойства информативных переменных для (1.1) выразим в следующих условиях. Пусть $h_i(t,x)$ инварианты $(\dot{h} = 0)$ системы (1.6) на R^0:

$$R^0 : t \geqslant 0,\ \|x'\| \leqslant r^0,\ r^0 = \mathrm{const},\ \{x''\} = E^{n-k}. \tag{1.9}$$

Предположим, что $f_j(t,x)$ на $R^{0\prime} \equiv R^0/\{x' = 0\}$ удовлетворяет равенствам

$$X \circ f_j \equiv (\partial/\partial t + X_s \partial/\partial x_s) \circ f_j = G_j(t,x),$$

в которых величины G_j выражаются в новых переменных на $Q_0/\{y = 0\} \equiv Q'_0$

$$Q'_0 : t \geqslant 0,\quad 0 < \|y\| \leqslant H^0,\quad H^0 = \mathrm{const},\quad z \in Z \tag{1.10}$$

непрерывными функциями $g_j(t,y,z)$, удовлетворяющими на Q'_0 неравенству

$$|G \circ \hat{S}(q)| \leqslant L_0(q),\qquad G \equiv \partial/\partial t + g_j \partial/\partial y_j + g_l \partial/\partial z_l. \tag{1.11}$$

Смысл $\hat{S}, L_0, g$ выражают формулы (2.7), (1.16) и (1.13). Учитывая оценку (1.8), полагаем $H^0 = \mathrm{const}$, где $\varrho_2(\|y\|) \leqslant r^0$ при $0 \leqslant \|y\| \leqslant H^0$. Ясно, что $Q'_0 \subseteq Q^*(t) \leftrightarrow R^{0\prime}$; обозначим $q = (t, y'_i, y''_j, z_l)^{\mathrm{T}}$. В новых переменных получаем на Q'_0 систему

$$\dot{y}' = N_1 u,\qquad \dot{y}'' = g_2 + N_2 u,\qquad \dot{z} = g_3 + N_3 u, \tag{1.12}$$

эквивалентную [4] системе (1.1). Здесь приняты обозначения

$$g_1 = (X \circ h_i)^{\mathrm{T}} \equiv 0,\ g_2 = (X \circ f_j)^{\mathrm{T}},\ g_3 = (X \circ \zeta_l)^{\mathrm{T}};\ N_1 = [n'_{i\sigma}],\ N_2 = [n''_{j\sigma}],$$
$$N_3 = [n_{l\sigma}];\quad n'_{i\sigma} = m_{s\sigma} \partial h_i/\partial x_s,\quad n''_{j\sigma} = m_{s\sigma} \partial f_j/\partial x_s,\quad n_{l\sigma} = m_{s\sigma} \partial \zeta_l/\partial x_s, \tag{1.13}$$

в которых преобразование T^{-1} переводит все величины в функции от q. По свойству функций h, f, ζ, X, M величины $g, n \subset C$ на Q'_0. Пусть на $\{\tilde{u}[t]\}$ функции $g(q)$, $n(q)$ удовлетворяют условиям существования, единственности и z-продолжаемости [2] решений системы (1.12) для любых начальных значений $q^0 \equiv q[t^0] \subset Q'_0$ при условии, что $0 < \|y[t]\| \leqslant H^0$. Далее, класс допустимых управлений $\{\tilde{u}[t]\}$ составляют управления $\tilde{u}[t]$, переводящие y-компоненту q в нуль. Это равносильно переводу x'-компоненты x в нуль на $\tilde{u}[t]$. Допустимое управление, доставляющее минимум критерию качества управления, оптимально $u^0[t]$. Пусть критерием качества x'-стабилизации является минимальность интеграла [1,3] вида

$$I(\hat{u} \mid t^0, x^0) = \int_{t^0}^{\hat{t}} \bar{L}'(\hat{u} \mid \tau, \hat{x}[\tau])\, d\tau, \quad \bar{L}' = L'_1(u \mid t, x) + L'_0(t, x), \tag{1.14}$$

в котором

$$0 \leqslant \bar{L}'_1,\ 0 \leqslant \bar{L}'_0;\ \bar{L}'_1,\ \bar{L}'_0 \in C \text{ на } \Omega_1 \times R;\ \bar{L}'_1(0, t, x) = 0 \text{ на } R;$$
$$\bar{L}'_1,\ \bar{L}'_0 \subset C_1 \text{ на } \Omega \times R / \{x' = 0\};\ \bar{L}' > 0,\ \bar{L}'_1,\ \bar{L}'_0 \geqslant 0 \text{ на } \Omega \times R^0 / \{x' = 0\}. \tag{1.15}$$

Выражения $\bar{L}'$, $\bar{L}'_1$, $\bar{L}'_0$ в новых переменных $\bar{L}(q)$, $\bar{L}_1(q)$, $\bar{L}_0(q)$ имеют согласно (1.15) свойства

$$L > 0 \text{ на } \Omega \times Q'_0;\ \bar{L}_1,\ \bar{L}_0 \subset C_1 \text{ на } \Omega \times Q'_0;$$
$$0 \leqslant \bar{L}_1,\ 0 \leqslant \bar{L}_0;\ \bar{L}_1,\ \bar{L}_0 \subset C \text{ на } \Omega \times Q_0. \tag{1.16}$$

Множество цели зададим равенством $x' = 0$, эквивалентным $y = 0$. Время перехода $\hat{t} - t^0$ дается условием $y[\hat{t}] = 0$.

З а д а ч а. Для критерия (1.14) с функцией $\bar{L}'$ вида (1.15) найти регулятор $u^0(t, x)$ оптимальной x'-стабилизации, которому соответствует оптимальное управление $u^0[t] = u^0(t, q[t]) \in \{\tilde{u}[t]\}$.

2. Способ решения

Применим метод динамического программирования Беллмана и второй метод Ляпунова, используя при этом результаты работ [1-3,5]. Введем обозначения:

$$q' = (y, z)^{\mathrm{T}},\ p = \partial S / \partial q',\ b = N^{\mathrm{T}} p,\ N^{\mathrm{T}} = [N_1^{\mathrm{T}},\ N_2^{\mathrm{T}},\ N_3^{\mathrm{T}}],\ \langle a, b \rangle = a_k b_k, \tag{2.1}$$

где $S \in C$ на $Q_0, S \in C_1$ на Q'_0. Выражение [5] $B(u|q, S)$ на Q'_0 имеет с учетом (1.12)—(1.14) и (2.1) вид

$$B(u \mid q, S) = K(u \mid q, S) + G \circ S(q) + \bar{L}_0(q), \tag{2.2}$$

где

$$K(u \mid q, S) = \bar{L}_1(u \mid q) + \langle u, b \rangle. \tag{2.3}$$

Пусть задача «невырожденная»: $\inf\limits_{\Omega_1} K(u)$ достигается также на Ω при $q \in Q'_0$. Назовем функцию $\hat{S}(t, y, z)$ задачи информативной, если $\hat{S} \in C$ на $Q_0, \hat{S} \subset C_1$ на Q'_0 и выполнены условия:

$$\hat{S}(t^0, y^0, z^0) \leqslant \hat{S}(t^1, y^1, z^1) \text{ для } t^0 < t^1 \in \Gamma;\ z^0,\ z^1 \in Z, \text{ если}$$
$$\|y^0\| \leqslant \eta^0, \quad \|y^1\| = h^0; \tag{2.4}$$

$$\hat{S}(t, 0, z) = 0 \text{ на } Q_0; \tag{2.5}$$

$$K(u^0 \mid q, \hat{S}) \leqslant K(u \mid q, \hat{S}) \text{ на } Q'_0 \text{ для } u^0 \in \Omega,\ u \in \Omega_1; \tag{2.6}$$

$$B(u^0 \mid q, \hat{S}) = 0,\ \hat{S} > 0 \text{ на } Q'_0. \tag{2.7}$$

Здесь $u^0 = u^0(q, p)$ означает экстремальный регулятор, для которого согласно условию (1.16) и уравнению (2.7) величина $(d\hat{S}/dt)_0 < 0$ на Q'_0. Символы $(d/dt)_0$, $(d/dt)_*$ суть производные вдоль интегральных кривых системы (1.12), порожденных u^0 и допустимым регулятором $\hat{u}$. Соответствующую систему назовем экстремальной и допустимой. Числа

$\eta^0 > 0$ и $h^0 > 0$ фиксированы, удовлетворяют оценке (2.10) и неравенству $\eta^0 < h^0$, $h^0 = H^0 - \varepsilon$. Назовем $\hat{V}(q)$ информативной, если $\hat{V} \subset C$ на Q_0, $\hat{V} \subset C_1$ на Q'_0 и выполнены условия:

$$V_0 \leqslant \hat{V}(q) \leqslant V_1 \text{ на } Q_0;\ V_0(y) \leqslant V_1(y) \subset C \text{ на } y = E^m, \tag{2.8}$$

где $V_0(y) > 0$ на $E^m/0$; $V_1(0) = V_0(0) = 0$, $V_0(y) \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$;

$$(d\hat{V}/dt)_0 = -\hat{W}(q) \leqslant -w_0(y) \text{ на } Q'_0;\ w_0(y) \subset C \text{ на } E^m; \quad w_0(y) > 0;\ \ y \neq 0. \tag{2.9}$$

Найдем η^0 методом Ляпунова [2, 5]. Пусть $v^0 = \inf V_0(y)$ на $\|y\| = h^0$. По v^0 имеем $\eta^0 = n^0 - \varepsilon$, где $n^0 = \sup n$ таких, что $V_1(y) < v^0$ при любых y из n-области $0 < \|y\| \leqslant n$.

$$\text{Область } \eta^0: t \geqslant 0,\ 0 < \|y\| \leqslant \eta^0,\ z \in Z. \tag{2.10}$$

Для получения условий y-стабилизации определим $\hat{S}^*$-представимую на Q_0. Пусть существует система независимых инвариантов $\gamma_s(q)$, $s = \overline{1, n}$, экстремальной системы (1.12) со свойством $(d\gamma_s/dt)_0 = 0$ на Q'_0, $\gamma_s \subset C_1$, $\gamma_s \subset C$ на Q_0, для которой в области $\Gamma_0 \leftrightarrow Q_0$ изменения $\hat{V}$, γ_s найдется функция $\bar{S}(\hat{V}, \gamma_s) \subset C$, $\bar{S} \subset C_1$ на $\Gamma'_0 \leftrightarrow Q'_0$, удовлетворяющая условиям

$$\bar{S}(0, \gamma) \underset{\Gamma_0}{=} 0, \quad \partial\bar{S}/\partial\hat{V} = \nu(q) \underset{Q'_0}{>} 0, \quad \bar{S}[\hat{V}(q), \gamma_s(q)] \underset{Q_0}{\equiv} \hat{S}^*(q). \tag{2.11}$$

С учетом равенств (2.7), (2.11) и в силу независимости $\hat{V}$, γ_s на Q'_0 по условию (2.9) получаем, что $\hat{V}$ — решение линейного уравнения

$$D(\hat{S}^*, \gamma)(d\hat{V}/dt)_0 = -D(\hat{V}, \gamma)\bar{L}(u^0 | q) \text{ на } Q'_0, \tag{2.12}$$

где $D(F, f_1, \ldots, f_n)$ обозначает якобиан $\partial(F, f_1, \ldots, f_n)/\partial(t, y_i, y_j, z_l)$. Из условий (2.11) следуют соотношения

$$D(\hat{S}^*, \gamma) D^{-1}(\hat{V}, \gamma) = \partial\bar{S}/\partial\hat{V} = \nu(q) > 0 \text{ на } Q'_0, \tag{2.13}$$

которые означают, что $D(\hat{S}^*, \gamma) \neq 0$. В силу формул (2.12) и (2.13) имеем

$$\hat{W}(q) = \nu^{-1}(q)\bar{L}(u^0 | q) = \\ = \left(\frac{\partial\bar{S}}{\partial\hat{V}}\right)^{-1} \bar{L}(u^0 | q) = D(\hat{V}, \gamma) D^{-1}(\hat{S}^*, \gamma)\bar{L}(u^0 | q). \tag{2.14}$$

Предположим, что экстремальная система (1.12) имеет функции $\hat{V}$, $\hat{S}^*$ на Q'_0, которые удовлетворяют по их определению условиям (2.7)—(2.9). Формула (2.14) дает $\hat{W}(q)$. Используя их согласно методу Ляпунова, можно с помощью рассуждений, аналогичных выводу теоремы об асимптотической y-стабилизации [2], получить утверждение об y-стабилизации системы (1.12) непрерывным на Q'_0 регулятором $u^0(q)$ для невырожденной задачи. Пусть экстремальная система (1.12) допускает информативные $\hat{V}$ и $\hat{S}$. Тогда y-компонента ее решения с условиями q^0 из области (2.10) остается в шаре $\|y\| \leqslant h^0$ и удовлетворяет предельному соотношению $\lim\limits_{t \to t^*} y[t] = 0$, иными словами, примыкает к $y = 0$ при $t = t^* > t^0$. Здесь t^* — первый момент примыкания, который существует для каждой $q^0 \in \eta^0$ и является конечным или бесконечным. Отсюда, учитывая оценки (1.7) и (1.8), получаем x'-стабилизацию системы (1.1) регулятором $u^0(q(t,x))$ при t^0, x^0 из λ^0-области

$$t \geqslant 0, \quad 0 < \|x'\| \leqslant \lambda^0, \quad x'' \in E^{n-k}. \tag{2.15}$$

Здесь λ^0 такое, что $r_2(\|x'\|) \leqslant \eta^0$ при $0 \leqslant \|x'\| \leqslant \lambda^0$. Начальным значениям отвечают решения экстремальной системы (1.1), для которых $\|x\| \leqslant r^0$, $\lim\limits_{t \to t^*} x'[t] = 0$. Ввиду y-стабилизируемости, непрерывности $q^0[t]$ на $[t^0, t^*)$ и $\partial\hat{S}/\partial q$ на Q'_0 заключаем, что $u^0[t] = u^0(q^0[t], p^0[t])$ непрерывна на $[t^0, t^*)$ для $q^0 \in \eta^0$. Интересна оценка времени x'-стабилизации. Получим ее, используя модификацию метода [6].

Лемма 1. *Пусть для уравнения* $(d\hat{V}/dt)_0 = -\hat{W}$ *на* Q'_0 *найдется функция* $G(t, \hat{V}) \subset C$, *удовлетворяющая оценке* $-\hat{W}(q) \leqslant G(t, \hat{V})$, *такая, что дифференциальное неравенство*

$$\dot{v} \leqslant G(t, v) \tag{2.16}$$

не будет иметь в $M' : t \geqslant 0$, $M^0 \geqslant v > 0$ *ни одного исчезающего при* $t \to +\infty$ *и неограниченно продолжаемого решения с начальными условиями в* $m : t^0 \geqslant 0$, $0 < v^0 \leqslant m$. *(Обозначения:* $M^0 = \sup V_1(y)$ *на* $0 < \|y\| \leqslant h^0$; $m^0 = \sup V_1(y)$ *на* $0 < \|y\| \leqslant \eta^0$). *Тогда все решения экстремальной системы* (1.12), *стартующие из* η^0*-области, примыкают к* $y = 0$ *за конечное время.*

Допустив противное, найдем экстремальную интегральную кривую с q^0 из η^0-области, удовлетворяющую условиям

$$\|y[t]\| \leqslant h^0, \quad \|y[t]\| \to 0, \quad t \to +\infty. \tag{2.17}$$

Функция $v^*[t] = \hat{V}(q^0[t])$ вдоль нее определена на $t^0 \leqslant t < \infty$, ибо взятое решение z-продолжаемо ввиду $q^0[t] \in Q'_0$ и $u^0[t] \in \{\hat{u}[t]\}$. Из условий (2.8), (2.9) и (2.17) следует, что $v^*[t] \searrow 0$ при $t \to \infty$. Но согласно (2.9) $v^*[t]$ удовлетворяет неравенству (2.16) и оказывается неограниченно продолжаемым решением с начальным значением $v^{*0} \leqslant m$, исчезающим при $t \to +\infty$, которого нет по условию. Лемма доказана.

Практически удобен случай $G = G_1 = k(t)\,l(v)$, когда $k, l \subset C$ на M', где они имеют свойства $l > 0$; $k(t) \leqslant 0$; $\lim\limits_{v \to 0} \int\limits_v^{M^0} l^{-1}(\xi)\,d\xi < +\infty$; $\lim\limits_{t \to +\infty} \int\limits_t^0 k(\tau)\,d\tau = +\infty$, при которых неравенство (2.16) удовлетворяет условиям леммы.

Докажем теперь, что на экстремальной траектории из области (2.15) интеграл (1.14) достигает inf на $\{\hat{u}[t], \hat{x}[t]\}$. Пусть t^* и $\hat{t}$ — первые моменты примыкания экстремального $x^0[t]$ и допустимого $\hat{x}[t]$ решений из $x^0 \in \lambda^0$-области, которым эквивалентны кривые $q^0[t]$ и $\hat{q}[t]$ с началом в η^0-области, примыкающие к $y = 0$. На области $\hat{T} : [t^0, \hat{t})$ определения вектор-функции $\hat{q}[t]$ возможны два случая. В первом — для всех $t \in \hat{T}$ верно $\|\hat{y}[t]\| \leqslant h^0$. Поэтому $\hat{q}[t] \in Q'_0$, где для $\hat{S}$, u^0, $\hat{u}$ выполняются условия (2.6) и (2.7), в силу которых вдоль $\hat{q}[t]$ на $\hat{T}$ верно неравенство

$$-(d\hat{S}/dt)_* \leqslant L(\hat{u}[t], \hat{q}[t]), \tag{2.18}$$

интегрируя которое от t^0 до $\hat{t}$ с учетом $\hat{S} \in C$ и условий (2.5), (2.6), получаем для области $q^0 \in \lambda^0$ соотношения

$$I(u^0 \mid t^0, x^0) = \hat{S}(q^0) \leqslant \int_{t^0}^{\hat{t}} L(\hat{u}[t], \hat{q}[t])\,dt = I(\hat{u} \mid t^0, x^0). \tag{2.19}$$

Во втором случае найдется $t^1 (t^0 < t^1 < \hat{t})$ такой, что $\|\hat{y}[t^1]\| = h^0$, для которого $\|\hat{y}[t]\| \leqslant h^0$ при $t \in \hat{T}^1 : [t^1, \hat{t})$. Используя обозначения $y^1 = \hat{y}[t^1]$, $z^1 = \hat{z}[t^1]$, получаем аналогичное предыдущему неравенство

$$I(u^0 \mid t^1, x^1) = \hat{S}(t^1, y^1, z^1) \leqslant \int_{t^1}^{\hat{t}} L(\hat{u}[t], \hat{q}[t])\,dt = I(\hat{u} \mid t^1, x^1),$$

откуда в силу оценки (2.4) и $L' \geqslant 0$ вновь придем к соотношению (2.19). Объединяя их с утверждением об x'-стабилизации, получаем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть экстремальная система* (1.12) *имеет на области* Q_0 *информативные функции* $\hat{S}(q)$, $\hat{V}(q)$, *заданные условиями* (2.4)—(2.9). *Тогда непрерывный экстремальный регулятор* $u^0(q, p)$ *порождает непрерывное оптимальное управление* $u^0[t]$ *в невырожденной задаче для начальных значений* t^0, x^0 *из области* (2.15).

Следствие 1. Если $L'(u^0) > 0$ на $\Omega \times R'$, а область Q'_0 совпадает с Q, на которой экстремальная система (1.12) допускает информативные $\hat{S}(q)$ и $\hat{V}(q)$, то управление $u^0(q^0[t], p^0[t])$ оптимально по функционалу (1.14) в целом. При этом условие (2.4) отпадает.

Следствие 2. Если $\hat{S}^* = \bar{S}(\hat{V})$, где $\bar{S}(0) = 0$, $\bar{S} \in C_1$, $d\bar{S}/d\hat{V} > 0$ на $(0, \infty)$, а $\hat{S}^*$ удовлетворяет лишь условиям (2.5)—(2.7), $L(u^0) \geqslant \geqslant w_0(y)$ на Q'_0, причем для $\hat{V} = \bar{S}^{-1}(\hat{S}^*)$ справедлива оценка (2.8), то управление $u^0(q^0[t], \partial\hat{S}^*/\partial q'^0[t])$ оптимально по критерию (1.14) для $t^0, x^0 \in \lambda^0$-области. При этом строго возрастающая $\bar{S}$ может быть ограничена на $[0, \infty)$ так, что $\hat{S}^*(q) = \bar{S}(\hat{V})$ не будет бесконечно большой по y.

Теорема 1 и ее следствия суть модификации теорем IV и 3.1 из [5,2]. Здесь учитывается вариант существования информативных переменных, используются две функции Ляпунова, не обязательно дифференцируемые на множестве цели. Время стабилизации не фиксировано бесконечностью и условия $u^0[t] \to 0$ при $t \to t^*$ не требуется. Аналогично [2] выводится обратный к теореме 1 и близкий к задаче обращения [1] при выборе критерия качества регулирования

Результат. Пусть система (1.6) имеет информативные инварианты h и функции f, удовлетворяющие условию (1.11). Рассмотрим связку Четаева $\hat{S}(t, h, f, \zeta)$, удовлетворяющую условиям (2.4) и (2.5). Пусть найдутся: число ω^0 и функция $\omega(u)$, задающие область Ω_1 условиями (1.3)—(1.5), а также функция $L_1(u/q)$ со свойствами (1.16) такие, чтобы на Ω существовал регулятор $u^0(q, p) \subset C$, удовлетворяющий условию (2.6). Из условия (2.7) получим для $L_0(q)$ значения на Q'_0

$$L^*_0(q) = -K(u^0 \mid q) - G_0 S(q), \tag{2.20}$$

которые продолжим с помощью $\bar{L}_0(q) \subset C, \bar{L}_0(q) \geqslant 0 (\bar{L}_0(q) \equiv L^*_0(q)$ на $Q'_0)$ на всю область $Q/\{y = 0\}$. Из условия (1.11) получим на Q'_0 неравенства $K(u^0 \mid q) \leqslant 0$, $\bar{L}^*_0(q) \geqslant 0$. Отсюда заключаем, что $(d\hat{S}/dt)_0 \leqslant 0$. Пусть функция отрицательна на Q'_0. Тогда условия (2.4)—(2.7) выполнены при сохранении смысла $u^0 = u^0(q, p)$. Предположим, что экстремальная система (1.12) имеет $\hat{V}(q)$, удовлетворяющую условиям (2.8) и (2.9). Тогда $\hat{S}$ — оптимальная функция Беллмана на области (2.10). Итак, определен вид $\bar{L}'(u|t, x)$ для которой произведенный связкой $\hat{S}(t, h, f, \zeta)$ регулятор $u^0(q, p)$ оптимален для системы (1.1) с критерием (1.14), множеством цели $x' = 0$ при значениях $t^0, x^0 \in \lambda^0$. Из равенств (2.7), (2.14) и оценки (1.11) выводим, что в случае $\hat{S}^*$ для выполнения условия (2.9) теоремы достаточно, чтобы величина $\hat{W}_1$ удовлетворяла неравенству

$$\hat{W}_1 \equiv \nu^{-1}(q)\,[\bar{L}_1(u^0\,|\,q) - K(u^0\,|\,q) - \bar{L}_0(q)\,] \geqslant w_0(y) \text{ на } Q'_0. \tag{2.21}$$

Если при неравенствах $K(u^0) \leqslant 0$, $L_1(u^0\,|\,q) + G \circ \hat{S}(q) \leqslant$ $\leqslant -(\langle b, u^0\rangle + G \circ \hat{S}(q))$ верна оценка

$$\hat{W} = -\nu^{-1}(q)\,[\langle b, u^0\rangle + G \circ \hat{S}(q)\,] \geqslant w_0(y) \text{ на } Q'_0, \tag{2.22}$$

то условие (2.9) выполнено.

3. Примеры

Пусть в невырожденной задаче $L_1(u)$ выпукла на Ω_1, $q \in Q_0$. Тогда $\inf\limits_{u \in \Omega} K(u)$ достигается или в единственной μ-граничной точке u'_0, которая удовлетворяет уравнениям

$$\nabla K(u'_0) + \mu \nabla \omega(u'_0) = 0, \quad \omega(u'_0) = \omega^0, \tag{3.1}$$

где $\mu > 0$, если решение существует для данного $q \in Q'_0$, или в стационарных точках u_0, которые должны удовлетворять при $q \in Q'_0$ уравнениям

$$\nabla K(u_0) = 0, \quad 0 < \omega(u_0) \leqslant \omega^0, \tag{3.2}$$

образуя ограниченное выпуклое множество $\{u_0\}$, замкнутое в Ω при $K(u_0) < 0$. Пусть функции $\omega, L, \hat{S}$ удовлетворяют условию равномерности по Q'_0, т. е. для всех $q \in Q'_0$ имеем либо решение системы (3.1), либо решение системы (3.2).

Рассмотрим вначале строго выпуклую $L_1(u) \equiv L_{11}(u)$. В этом случае стационарный режим u_{01} — единственное решение системы (3.2) и справедливы [7] оценки:

$$\langle b, u_{01}\rangle < K_1(u_{01}\,|\,q) < K_1(0\,|\,q) = 0. \tag{3.3}$$

Для его μ-граничного режима u'_{01} имеем неравенства

$$\langle b, u'_{01}\rangle < K(u'_{01}\,|\,q) < -\mu_1(q, p)\,\omega^0 < 0. \tag{3.4}$$

В [7] даны выражения экстремальных регуляторов $u_{01}(q|p_1)$, $u'_{01}(q|p'_1)$ и уравнений Беллмана—Якоби вида

$$B_1(q, \partial\hat{S}_1/\partial q) \equiv \bar{L}_{01}(q) + G \circ \hat{S}_1(q) + K_1[u_{01}(q, p_1)\,|\,q] = 0, \tag{3.5}$$

$$B'_1(q, \partial\hat{S}'_1/\partial q) \equiv \bar{L}_{01}(q) + G \circ \hat{S}'_1(q) + K_1[u'_{01}(q, p'_1)\,|\,q] = 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим теперь случай фазовой $\bar{L}_1 \equiv 0$, $b = N^{\mathrm{T}} p$, когда действительное p не содержится в подпространстве решений уравнения $N^{\mathrm{T}} x = 0$. Для него существует лишь μ-граничный экстремальный режим u'_{03}, удовлетворяющий равенству $\langle b, u'_{03}\rangle = -\omega^0 \mu_3$, для которого в [7] дано выражение экстремального регулятора $u'_{03}(q, p'_3)$ и уравнения Беллмана—Якоби вида

$$B'_3(q, \partial\hat{S}'_3/\partial q) \equiv \bar{L}_{03}(q) + G \circ \hat{S}'_3(q) - \omega^0\mu_3(q, p'_3) = 0. \quad (3.7)$$

Сложнее случай «однородности» $\bar{L}_1$ степени 1: $L_{12}(\varepsilon u) = \varepsilon L_{12}(u) > 0$, $\varepsilon > 0$. Здесь множество стационарных регуляторов составляет луч

$$u_{02} = \alpha' u_{*2}, \quad \text{где} \quad \alpha' \subset (0, 1], \quad \omega(u_{*2}) = \omega^0 \quad (3.8)$$

и уравнения (3.2) удовлетворяются при любом α'. Получаем соотношения

$$\langle b, u_{*2}\rangle < K_2(u_{*2} \mid q) = K_2(\alpha' u_{*2} \mid q) = 0. \quad (3.9)$$

Согласно [7] для экстремального регулятора u_{*2} имеем выражение вида $w_2(q, p_{*2})$, в котором функция $S_{*2}(q)$ решает единое для всех регуляторов (3.8) уравнение Беллмана

$$B_{*2}(q, \partial\hat{S}_{*2}/\partial q) = G \circ \hat{S}_{*2}(q) + \bar{L}_{02}(q) = 0, \quad (3.10)$$

α'-произвол в выражении u_{02} можно использовать для минимизации на $\{\alpha' u_{*2}\}$ дополнительного функционала, в частности, времени перехода.

Пусть класс $A = \{\alpha\}$ образован функциями $\alpha: 0 < \alpha(q) \leqslant 1$, каждая из которых порождает оптимальное управление (3.8) и обладает $\hat{V}_\alpha \in \{\hat{V}\}$. Предположим, что на $0 < \inf{}_A \overset{0}{\eta}_\alpha = \overset{-0}{\eta}$ -области: $t \geqslant 0$, $0 < \|y\| \leqslant \bar{\eta}^0$, $z \in Z$ решение $\hat{S}_{*2} \equiv \hat{S}^*$ уравнения (3.10) представимо $\hat{S}^* = \bar{S}_\alpha(\hat{V}_\alpha, \overset{\alpha}{\gamma_s})$. Рассмотрим подслучай, когда верны условия

$$G \circ \hat{S}^* = k\langle b, u_*\rangle; \quad \langle b, u_*\rangle D(\hat{V}_\alpha, \overset{\alpha}{\gamma_s}) = fD(\hat{S}^*, \overset{\alpha}{\gamma_s}), \quad (3.11)$$

в которых индекс «2» опущен; согласно соотношениям (2.13), (2.14) и свойствам $\bar{S}_\alpha$, $\hat{V}_\alpha$ удовлетворяются неравенства

$$k = k(t, \hat{v}_\alpha) \geqslant 0, \; f = f(t, \hat{v}_\alpha) < 0, g = f(t, \hat{v}_\alpha)\,[k(t, \hat{v}_\alpha) + \alpha] \leqslant w_0(\hat{v}_\alpha) < 0, \quad (3.12)$$

где $k, f \in C$ на $\Gamma_*: t \geqslant 0$, $0 < v \leqslant \bar{v}^0 = \inf[\sup V_{0\alpha}(y)$ на $\|y\| \leqslant \bar{\eta}^0]$. В силу условий (3.11) и формулы (2.14) для $\hat{v}_\alpha$ на Γ_* получаем уравнение

$$\dot{v} = f(t, v)\,[k(t, v) + \alpha]. \quad (3.13)$$

Для перечисленных допущений получим утверждение, обобщающее соответствующий результат в [3].

Лемма 2. *Если экстремальная система* (1.12) *допускает информативные* $\hat{S}^*, \hat{V}_{\alpha'=1} \equiv \hat{V}$ *и условия* (3.11) *выполняются, то регулятор* u_{*2} *на классе* (3.8) *осуществляет быстродействие при начальных условиях из области*

$0 \leqslant t^0$, $\|y^0\| \leqslant v^0: \sup V_1(y)$ *на* $\|y^0\| \leqslant v^0 < \bar{v}^0$ на $z^0 \in Z$.

Сравним на Γ_* решения $v_1[t]$ и $v_0[t]$ системы (3.13), порожденные управлениями $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$, и покажем, что $v_0[t] > v_1[t]$ на (t^0, t^*). Здесь $t^* = \min\{t^*_1, t^*_0\}$. Выберем t^0, $v^0 = v^0_1 = v^0_0 \in \Gamma_*$. В силу $d(v_0 - v_1)/dt = -f(t^0, v^0) > 0$ для t^0 найдется $t' > t^0$ такое, что $v_0[t] > v_1[t]$ на (t^0, t'). Аналогично, из неравенств $g(t'', v_1[t'']) \leqslant w_0(v_1[t'']) < 0$ заключаем, что на (t', t^*) нет такого t'', в котором бы решения $v_0[t]$ и $v_1[t]$ совпадали или пересекались. Следовательно, $v_0[t] > v_1[t]$ на (t^0, t'), что равносильно неравенству $t^* = t^*_1 \leqslant t^*_0$. Лемма доказана.

В граничном варианте этого случая имеем [7] выражение оптимального регулятора $u'_{02}(q, p'_2)$ и уравнение Беллмана вида

$$B'_2(q, \partial\hat{S}'_2/\partial q) = G \circ \hat{S}'_2(q) + \bar{L}_{02}(q) - \omega^0\mu_2(q, p'_2) = 0. \tag{3.14}$$

Здесь выполняются неравенства

$$\langle b, u'_{02}\rangle < K_2(u'_{02} \mid q) < 0. \tag{3.15}$$

В силу оценок (3.3), (3.4), (3.9) и (3.15) в рассмотренных случаях выполнено условие невырожденности задачи. Учитывая выбор регуляторов u_{01}, u'_{01}, u'_{03}, u_2, u'_{02} и равенства (3.5)—(3.7), (3.10), (3.14), получаем, что для $\hat{S}_1$, $\hat{S}'_1$, $\hat{S}'_3$, $\hat{S}_{*2}$, $\hat{S}'_2$ справедливы условия (2.6) и (2.7). Для выполнения условия (2.9) в теореме 1 и полученном обратном результате достаточно, чтобы соответственно удовлетворялись оценки (2.21) и (2.22).

Рассмотрим теперь норм-инвариантную систему Атанса—Летова [1, 3], управляемую кусочно-непрерывной вектор-функцией $u[t]$

$$dy/d\tau = g[y, t] + u,\ dt/d\tau = 1,\ \dim y = \dim u = n \tag{3.16}$$

со свойствами $\|y[t]\| = \|y[0]\|$ при $u \equiv 0$; $\|u\| \leqslant \omega^0$, множеством цели $y = 0$ и критерием качества

$$I = \int_0^{t^*} d\tau. \tag{3.17}$$

Выполнение условий (1.3)—(1.5) для функции $\|u\|$ очевидно. Рассматриваемая система относится к случаю фазовой $L_1 \equiv 0$ системы. Величина $u'_{03} = -\omega^0 y\|y\|^{-1}$. Уравнение (3.7) принимает вид

$$\omega^0 d\hat{S}'_3/d\|y\| - 1 = 0 \tag{3.18}$$

$$\mu_3 = \omega^{0^{-1}}.$$

Решением уравнения (3.18) является функция $\hat{S}'_3 = \omega^{0^{-1}}\|y\|$, которая удовлетворяет всем условиям (2.4)—(2.7), а также оценкам (2.8) и (2.9) на информативную $\hat{V}$, поскольку $(d\hat{S}'_3/dt)_0 = -1$. В силу равенства $L'(u'_{03}) = 1$ заключаем, что для рассматриваемого случая справедливо следствие 1 теоремы, согласно которому управление $u'_{03} = -\omega^0 y[t]\|y[t]\|^{-1}$ оптимально по критерию (3.17) в целом. Здесь роль информативной переменной h играет $\|y\|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Летов А. М., Динамика полета и управление, М., 1969.
2. Румянцев В. В., Об оптимальной стабилизации управляемых систем, ПММ, **34**, вып. 3 (1970).
3. Атанс М., Фалб П., Оптимальное управление, М., 1968.
4. Неймарк Ю. И., Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, М., 1972.
5. Красовский Н. Н., Проблемы стабилизации управляемых движений, В кн.: Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, доп. 4, М., 1969.
6. Ла-Салль Ж., Левшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М., 1964.
7. Кейс И. А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **23**, 210 (1974).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
2/VII 1974

I. KEIS

MÕNEDE DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE OPTIMAALSEST STABILISEERIMISEST

Vaadeldakse mitteautonoomsete süsteemide liikumise optimaalse stabiliseerimise ülesannet kas kõigi muutujate või osa parameetrite järgi. On tõestatud teoreem globaalse ja lokaalse optimaalse juhitavuse tingimuste kohta. On saadud pöördtulemus, mis vastab Kalman-Ljotovi pöördülesandele. On tõestatud lemma optimaalse üleminekuaja ja tingliku aegoptimaalsuse kohta.

I. KEIS

ON OPTIMAL STABILIZATION OF SOME DYNAMICAL SYSTEMS

Some problems of local and global optimal stabilization are considered in the article. Sufficient conditions for optimal controllability via part (all) coordinates are proved in theorem. A construction of performance index which guarantees the controllability is put forward. Lemma 1 contains conditions of the finite-time controllability. Lemma 2 provides the answer to the question: in which case the boundary optimal control supplies the most rapid transfer process on the class of optimal controls of the treated problem.