EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.2.04

УДК 517.948

А. РООЗЕ

ВЛИЯНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ НА НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Пусть дано нелинейное уравнение

$$P(x)=0, \tag{1}$$

которое рассматривается в пространствах Банаха. Известно [1,2], что метод вариации параметра позволяет от уравнения (1) перейти к задаче Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-\Gamma(x)P(x_0), \\ x(0)=x_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $t\in[0,1]$, x_0 — приближение к решению уравнения (1), $\Gamma(x)=[P'(x)]^{-1}$. Если $x(t)$ есть решение задачи (2), то $x(1)=x^*$ есть решение уравнения (1). С помощью известной теоремы Коши (см., напр., [3], с. 130—131) нетрудно проверить, что если $\|\Gamma(x)\|\leqslant B$, $\|P''(x)\|\leqslant K$ (производные непрерывные) при $x\in S(x_0, B\|P(x_0)\|)$, то существует единственное непрерывное решение $x(t)$ задачи (2) и $x(t)\in S(x_0, B\|P(x_0)\|)$ при $t\in[0,1]$*.

Задача (2) порождает две основные возможности численного решения уравнения (1). Во-первых, интервал [0,1] можно разбить на N частей так, что $h=1/N$, и применить численные методы решения задач Коши для нахождения приближения к $x(1)=x^*$. Метод Эйлера, например, определяет последовательность

$$x_{n+1}=x_n-h\Gamma(x_n)P(x_0) \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1). \tag{3}$$

В [2,4,5] последовательность (3) рассматривается как прием нахождения такого x_N, исходя из которого алгоритм Ньютона—Канторовича сходится к x^*. Там же определяются числа N, при которых такая комбинация позволяет получать желаемый результат. Во-вторых, с помощью (2) на основе методов Рунге—Кутта можно сконструировать алгоритмы для решения уравнения (1). На такую возможность указывается в работах [6–9] и в [6,10–12] приводятся некоторые построенные таким образом алгоритмы. Один класс алгоритмов, полученный на основе методов Рунге—Кутта второго порядка имеет вид

$$x_{n+1}=x_n-(1-\alpha)\Gamma(x_n)P(x_n)-\alpha\Gamma\left(x_n-\frac{1}{2\alpha}\Gamma(x_n)P(x_n)\right)P(x_n), \tag{4}$$

* Производные всюду в смысле Фреше.

где α — числовой параметр, $\alpha \neq 0$. В [12, 13] изучается влияние параметра α на свойства алгоритмов (4).

При фактических вычислениях реализовать алгоритмы без погрешностей не удается. Поэтому вместо (3) и (4) вычисления проводятся по выражениям

$$x_{n+1} = x_n - h\Gamma(x_n) P(x_0) + \delta_n \qquad (n = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{5}$$

и

$$x_{n+1} = x_n - (1-\alpha)\Gamma(x_n) P(x_n) - \alpha\Gamma\left(x_n - \frac{1}{2\alpha}\Gamma(x_n) P(x_n)\right) P(x_n) + \delta_n, \tag{6}$$

где δ_n учитывает сделанную на n-ом шаге погрешность. Ниже будем считать, что $\|\delta_n\| \leqslant \delta$ при всех n. По сравнению с (3) и (4) выражения (5) и (6) описывают действительный процесс вычислений более правдоподобно. Поэтому целесообразно изучить характеры их поведения. Два следующих пункта посвящены исследованию свойств алгоритмов (5) и (6). В четвертом пункте рассматривается полученный на основе (6) класс алгоритмов построения неявной функции.

2. Рассмотрим алгоритм (5). Радиус $\varrho > 0$ будем считать заданным. Требуется указать условия, при которых определяемый по (5) элемент x_N удовлетворяет условию $x_N \in S(x^*, \varrho)$. Радиус ϱ можно выбрать произвольно, например, так, что x_N будет принадлежать к области притяжения x^* некоторого другого алгоритма (напр., Ньютона—Канторовича). Для решения поставленной задачи удобно использовать результаты теории численного решения задач Коши. Можно проверить (см., напр., [14]), что при $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$, $\|P''(x)\| \leqslant K$ в области, содержащей решение $x(t)$ задачи (2) и определяемую алгоритмом (5) последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{N}$, справедлива оценка

$$\|x(t_n) - x_n\| \leqslant hN_1(e^{L_1 t_n} - 1)/L_1 + \delta(e^{L_1 t_n} - 1)/hL_1, \tag{7}$$

где $t_n = nh$,

$$L_1 = B^2 K \|P(x_0)\|, \tag{8}$$

$$N_1 = \frac{1}{2} B^3 K \|P(x_0)\|^2. \tag{9}$$

Оценки, аналогичные (7), можно, естественно, выписать и в том случае, если вместо метода Эйлера (метода Рунге—Кутта первого порядка), порождающего алгоритм (5), для построения последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ применить методы Рунге—Кутта более высоких порядков.

Обозначим

$$b = (e^{L_1} - 1)/L_1, \tag{10}$$

$$a = b\delta, \tag{11}$$

$$c = bN_1 \tag{12}$$

и учтем, что $h = 1/N$. Тогда из (7) следует $x_N \in S(x^*, \varrho)$, если

$$\frac{1}{N} c + Na \leqslant \varrho. \tag{13}$$

Последнее неравенство выполняется при

$$\underline{N} \leqslant N \leqslant \overline{N}, \tag{14}$$

где

$$\underline{N} = \frac{\varrho - \sqrt{\varrho^2 - 4ac}}{2a}, \tag{15}$$

$$\overline{N}=\frac{\varrho+\sqrt{\varrho^2-4ac}}{2a} \tag{16}$$

и $a>0$.

Учитывая (10)—(12), можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть*

1) $P(x)$ — *дважды непрерывно-дифференцируемая операция*;

2) $\|\Gamma(x)\|\leqslant B$, $\|P''(x)\|\leqslant K$ *при* $x\in S(x_0, B\|P(x_0)\|+\varrho)$;

3) $0<\delta\leqslant -2N_1+\sqrt{4N_1+L_1^2\varrho^2/(e^{L_1}-1)^2}$;

4) $\underline{N}=\dfrac{\varrho-\sqrt{\varrho^2-4\delta N_1(e^{L_1}-1)^2/L_1^2}}{2\delta(e^{L_1}-1)/L_1}$,

$$\overline{N}=\frac{\varrho+\sqrt{\varrho^2-4\delta N_1(e^{L_1}-1)^2/L_1^2}}{2\delta(e^{L_1}-1)/L_1};$$

5) $N_1, L_1\neq 0$ *определяются выражениями* (8) *и* (9).

Тогда найдется целое число $N\in[\underline{N},\overline{N}]$ *такое, что* x_N, *определяемый алгоритмом* (5), *обладает свойством* $x_N\in S(x^*,\varrho)$.

Доказательство. В первом пункте статьи отмечалось, что если $\|\Gamma(x)\|\leqslant B$, $\|P''(x)\|\leqslant K$ при $x\in S(x_0, B\|P(x_0)\|)$, то задача Коши (2) имеет единственное непрерывное решение $x(t)$ и $x(t)\in S(x_0, B\|P(x_0)\|)$ при $t\in[0,1]$. С другой стороны,

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\|x(t_n)-x_n\|+\|x(t_n)-x_0\|\leqslant hN_1(e^{L_1t_n}-1)/L_1+$$
$$+\delta(e^{L_1t_n}-1)/(hL_1)+B\|P(x_0)\|\leqslant hN_1(e^{L_1}-1)/L_1+$$
$$+\delta(e^{L_1}-1)/(hL_1)+B\|P(x_0)\|.$$

Так как $h=1/N$ то, учитывая (13), получаем $\|x_n-x_0\|\leqslant B\|P(x_0)\|+\varrho$ $(n=1,\ldots,N)$. Условия 1 и 2 теоремы гарантируют тем самым единственность $x(t)$ и справедливость оценок (7). Условие 4 суть выражения (15) и (16), так что если выполняется (14), то действительно и $x_N\in S(x^*,\varrho)$. Остается показать, что интервал $[\underline{N},\overline{N}]$ содержит при условиях теоремы по крайней мере одно целое число. При этом должно выполняться неравенство

$$\overline{N}-\underline{N}\geqslant 1. \tag{17}$$

Тогда с учетом (15) и (16) получаем

$$\overline{N}-\underline{N}=\frac{\sqrt{\varrho^2-4ac}}{a}\geqslant 1. \tag{18}$$

Так как $a>0$, то из (18) видно, что (17) гарантирует и действительность $\underline{N}$ и $\overline{N}$. С учетом (10)—(12) приходим от (18) к неравенству

$$\varrho^2\geqslant\delta^2b^2+4\delta N_1b^2, \tag{19}$$

откуда

$$\delta^2+4\delta N_1-\varrho^2/b^2\leqslant 0. \tag{20}$$

Принимая во внимание (10), нетрудно проверить, что неравенство (20), гарантирующее выполнение условия (17), справедливо при выполнении условия 3 теоремы. Теорема доказана.

3. Рассмотрим алгоритм (6). В отличие от алгоритма (5), который определяет приближение к x^* с заранее заданной точностью за конечное число шагов, алгоритм (6) определяет бесконечную последовательность.

Теорема 2. *Пусть*

1) *уравнение* (1) *имеет решение* x^* *в сфере* $S(x_0,\varrho)$;

2) *при* $x \in S(x_0, r)$, *где* $r = 2\varrho$, *справедливы оценки* $\|P'(x)\| \leqslant I$, $\|P(x)\| \leqslant P$;

3) *при* $x \in S(x_0, R)$, *где*

$$R = \begin{cases} r + \dfrac{BP}{2|\alpha|}, & \text{если } |\alpha| < \dfrac{1}{2}, \\ r + BP, & \text{если } |\alpha| \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

справедливы оценки $\|P'''(x)\| \leqslant L$, $\|P''(x)\| \leqslant K$, $\|\Gamma(x)\| \leqslant B$ (*производные непрерывные*);

4) $\delta < \dfrac{2}{3\sqrt{3C(|\alpha|)}}$, *где* $C(|\alpha|) = \left\{ \left[\dfrac{1}{8|\alpha|} + \dfrac{1}{6} \right] (2K^2B^5 + LB^4) + \dfrac{1}{6} K^2B^5 \right\} I^3$;

5) $r_1 < \|x^* - x_0\| < r_2$,

где

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{3C(|\alpha|)}} \cos(60° + \beta/3), \qquad r_2 = \frac{1}{\sqrt{3C(|\alpha|)}} \cos(60° - \beta/3),$$

$$\beta = \arccos\left(3\delta \sqrt{3C(|\alpha|)}/2\right).$$

Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, *определяемая выражением* (6), *обладает свойствами*

$$\|x^* - x_n\| < \|x^* - x_0\| \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^* - x_n\| \leqslant r_1.$$

З а м е ч а н и е. Естественно считать, что $\varrho < r_2$. Иначе условие 5 теоремы 2 само определяет область, где должно находиться решение x^* уравнения (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпишем оценку [12, 15]

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leqslant \Big\| -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-\lambda)^2 \Phi'''[(1-\lambda)P(x_n)] P^3(x_n)\, d\lambda +$$

$$+ \alpha \left\{ \int_0^1 (1-\lambda) D^2 \left[\Gamma\left(x_n - \frac{\lambda}{2\alpha} \Gamma(x_n) P(x_n) \right); \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(-\frac{\Gamma(x_n) P(x_n)}{2\alpha} \right)^2 \right] d\lambda \right\} P(x_n) \Big\| + \|\delta_n\|, \qquad (21)$$

где

$$\Phi'''[(1-\lambda)P(x_n)] P^3(x_n) = -\Gamma(\bar{x}_n) P'''(\bar{x}_n) [\Gamma(\bar{x}_n) P(x_n)]^3 +$$

$$+ 3\Gamma(\bar{x}_n) P''(\bar{x}_n) \Gamma(\bar{x}_n) P''(\bar{x}_n) [\Gamma(\bar{x}_n) P(x_n)]^3, \qquad P(\bar{x}_n) = (1-\lambda) P(x_n),$$

$$\int_0^1 (1-\lambda) D^2 \left[\Gamma(z_n); \left(-\frac{\Gamma(x_n) P(x_n)}{2\alpha} \right)^2 \right] d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2} \int_0^1 (1-\lambda) \{ 2\Gamma(z_n) P''(z_n) \Gamma(x_n) P(x_n) \times$$

$$\times\Gamma(z_n)P''(z_n)\Gamma(x_n)P(x_n)\Gamma(z_n)-\Gamma(z_n)P'''(z_n)[\Gamma(x_n)P(x_n)]^2\Gamma(z_n)\}d\lambda,$$

$$z_n=x_n-\frac{\lambda}{2\alpha}\Gamma(x_n)P(x_n).$$

При условии, что $x_n\in S(x_0,r)$ и $z_n,\bar{x}_n\in S(x_0,R)$, от (21) приходим к оценкам

$$\|x^*-x_{n+1}\|\leqslant C(|\alpha|)\|x^*-x_n\|^3+\delta,\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{22}$$

Далее доказательство основывается на методике, применяемой в теории асимптотических методов анализа (см. [16], гл. 8).

Обозначим $s_n=\|x^*-x_n\|$ и перепишем (22) в виде

$$s_{n+1}\leqslant C(|\alpha|)s_n^3+\delta\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{23}$$

Функция $f(s)=C(|\alpha|)s^3+\delta$ обладает следующими свойствами:
а) $f(s)$ непрерывна;
б) $r_1<f(s)<r_2$ при $s\in(r_1,r_2)$;
в) $s<f(s)<r_1$ при $s\in[0,r_1)$;
г) $f(r_1)=r_1$,
где числа r_1,r_2 — наименьший и наибольший положительные корни уравнения $f(s)-s=0$. Они определены в условии 5 теоремы. Условие 4 гарантирует, что $r_1<r_2$. Если определяемая неравенствами (23) последовательность $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}\subset[r_1,\ r_2)$, то $s_{n+1}<s_n$ при $s_n\in(r_1,r_2)$ и ввиду ограниченности снизу $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=r_1$. (Скорость сходимости кубическая.) Если же при некотором N будет $s_N\in[0,r_1]$, то и $s_{N+i}\in\in[0,r_1]$ при $i\geqslant 0$, $i\to\infty$. Так как последовательность $\{s_{N+i}\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена сверху и снизу, то по теореме Больцано—Вейерштрасса [17] у нее найдется по крайней мере одна сходящаяся подпоследовательность. Поэтому для определяемой неравенствами (23) последовательности верно $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}s_n\leqslant r_1$, если только $s_0<r_2$. Следовательно, при справедливости оценок (22) утверждения теоремы верны.
Убедимся в справедливости $x_n\in S(x_0,r)$. Действительно,

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\|x_n-x^*\|+\|x^*-x_0\|<\|x_0-x^*\|+\|x^*-x_0\|\leqslant 2\varrho=r.$$

Покажем, что $\bar{x}_n\in S(x_0,r+BP)$. Элемент $\bar{x}_n$ есть решение уравнения

$$P(x)-(1-\lambda)P(x_n)=0 \tag{24}$$

при некотором $\lambda\in[0,1]$. Из уравнения (24) после его дифференцирования по λ можно выписать аналогичную (2) задачу Коши, с той лишь разницей, что x_0 заменяется на x_n. При доказательстве теоремы 1 отмечалось, что если $\|\Gamma(x)\|\leqslant B$, $\|P''(x)\|\leqslant K$ в сфере $S(x_n,B\|P(x_n)\|)$, то полученная задача Коши имеет единственное решение $x(\lambda)$ при $\lambda\in[0,1]$ и $x(\lambda)\in S(x_n,B\|P(x_n)\|)$. В силу условия 2 можно теперь записать, что $\bar{x}_n\in S(x_0,r+BP)$. Наконец, выпишем оценку

$$\|z_n-x_0\|\leqslant\|x_n-x_0\|+\left\|\frac{\lambda}{2\alpha}\Gamma(x_n)P(x_n)\right\|<r+\frac{BP}{2|\alpha|}.$$

Заметим, что $R=\max\left\{r+BP,\ r+\dfrac{BP}{2|\alpha|}\right\}$ и, значит, в силу условия 3 $z_n,\bar{x}_n\in S(x_0,R)$. Теорема доказана.

4. Методика исследования свойств процесса (6) применима и к задаче о приближенном нахождении значений неявных функций. Пусть неявная функция $x(\lambda)$ задана уравнением

$$P(x, \lambda) = 0, \tag{25}$$

где $\lambda \in [0, \infty)$. Будем считать, что (25) определяет $x(\lambda)$ однозначно. Пусть нам известно приближение x^0 к точному решению $x(0)$ уравнения $P(x, 0) = 0$. Наша задача будет состоять в нахождении приближений к $x(\lambda_n)$, где $\lambda_n = nh$, $h = \text{const}$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим приближение к $x(\lambda_n)$ через x^n и для построения последовательности $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ воспользуемся некоторым алгоритмом S, который по известным x^n и $\lambda_{n+1} = \lambda_n + h$ определяет приближение x^{n+1} к $x(\lambda_{n+1})$. Нас будут интересовать только т. н. $[r_1, r_2]_G$-устойчивые алгоритмы S [18, 19].

Определение. Алгоритм S построения последовательности $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем $[r_1, r_2]_G$-устойчивым, $r_1 \leqslant r_2$, при следующих условиях:

1) из $r_1 \leqslant \|x^0 - x(0)\| \leqslant r_2$ вытекает $\|x^n - x(\lambda_n)\| \leqslant \|x^0 - x(0)\|$ при $n = 1, 2, \ldots$;
2) из $\|x^0 - x(0)\| < r_2$ вытекает $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \|x^n - x(\lambda_n)\| \leqslant r_1$, а из $r_1 < \|x^n - x(\lambda_n)\| < r_2$ соответственно $\|x^{n+1} - x(\lambda_{n+1})\| < \|x^n - x(\lambda_n)\|$;
3) при каждом n точка x^n входит в область притяжения решения $x(\lambda_n)$ уравнения $P(x, \lambda_n) = 0$ по отношению к алгоритму G.

Из определения видно, что $[r_1, r_2]_G$-устойчивый алгоритм дает такие приближения x^n к неявной функции $x(\lambda)$ в точках $\lambda_n = nh$, $n = 1, 2, \ldots$, что по крайней мере $\|x^n - x(\lambda_n)\| \leqslant r_2$. Условие 2 определения указывает на возможность улучшения этих оценок. Если же нас оценка $\|x^n - x(\lambda_n)\|$ не удовлетворяет, то с помощью алгоритма G всегда можно найти более точное приближение к $x(\lambda_n)$, т. е. к решению уравнения $P(x, \lambda_n) = 0$. В качестве алгоритма G можно выбрать, например, алгоритм Ньютона—Канторовича.

Нетрудно заметить, что приведенное выше определение основывается на методике, применяемой в теории асимптотических методов анализа для изучения поведения итеративных процессов [16]. Эта методика использована и нами при доказательстве теоремы 2.

Выберем в качестве S алгоритм

$$x^{n+1} = x^n - (1-\alpha)\Gamma(x^n, \lambda_{n+1}) P(x^n, \lambda_{n+1}) - \alpha\Gamma(\bar{x}^n, \lambda_{n+1}) P(x^n, \lambda_{n+1}) + \delta_n, \tag{26}$$

$$\bar{x}^n = x^n - \frac{1}{2\alpha}\Gamma(x^n, \lambda_{n+1}) P(x^n, \lambda_{n+1}),$$

где α — числовой параметр, $\alpha \neq 0$, $\Gamma(x, \lambda) = [P'_x(x, \lambda]^{-1}$ и δ_n учитывает погрешность вычислений на n-м шаге. Алгоритм (26) получен на основе (6). В качестве G рассмотрим алгоритм Чебышева [15]

$$x_{k+1} = x_k - \Gamma(x_k) P(x_k) - \frac{1}{2}\Gamma(x_k) P''(x_k) [\Gamma(x_k) P(x_k)]^2. \tag{27}$$

Приведем условия $[r_1, r_2]_{\text{чеб}}$-устойчивости алгоритма (26).
($[r_1, r_2]_{\text{чеб}}$ означает, что G есть алгоритм Чебышева).

Теорема 3. *Пусть в достаточно большой окрестности $x(\lambda)$ справедливы оценки* **

** Области, в которых эти оценки должны выполняться, здесь не приводятся ввиду нецелесообразности дополнительных выкладок.

$$\|P'_x(x,\lambda)\|\leqslant I, \quad \|P''_x(x,\lambda)\|\leqslant K, \quad \|P'''_x(x,\lambda)\|\leqslant L,$$
$$\|P'_\lambda(x,\lambda)\|\leqslant M, \quad \|\Gamma(x,\lambda)\|\leqslant B, \quad \|\delta_n\|\leqslant\delta \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и выполняются неравенства

$$\delta<2/3\sqrt{3(W/6+R)},$$
$$|\alpha|>W/8[4/27\delta^2-(W/6+R)],$$
$$0<h\leqslant[2/3\sqrt{3(1/8|\alpha|+1/6)W+R}-\delta]/BM.$$

Тогда алгоритмы (26) $[s_1(h;|\alpha|,\delta),s_2(h;|\alpha|,\delta)]_{\text{чеб}}$ *-устойчивы, где* s_1 *и* s_2 *есть положительные корни уравнения*

$$s=[(1/8|\alpha|+1/6)W+R](s+BMh)^3+\delta$$

и

$$W=(2K^2B^5+LB^4)I^3, \quad R=K^2B^5I^3/6.$$

Методика доказательства остается той же, что и при теореме 2. Заметим, что возможны и другие формулировки условий $[r_1,r_2]_G$-устойчивости алгоритмов [18, 19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Давиденко Д. Ф., ДАН СССР, **88**, № 4 (1953).
2. Ortega J. M., Rheinboldt W. C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Acad. Press, New York — London, 1970.
3. Картан А., Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, М., 1971.
4. Meyer G., SIAM J. Num. Anal., **5**, No. 4 (1968).
5. Bosarge W. E. Jr., Numer. Math., **17**, H. 4 (1971).
6. Kizner W., J. Soc. Indust. Appl. Math., **12**, No. 2 (1964).
7. Давиденко Д. Ф., ДАН СССР, **162**, № 3 (1965).
8. Hemesath N. B., IEEE Trans. Autom. Contr., AC-10, No. 4 (1965).
9. Савенко С. С., Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом решения дифференциальных уравнений, В сб.: Применение матем. методов и выч. техники в горном деле, М., 1965.
10. Давиденко Д. Ф., Об одном классе итерационных методов третьего порядка для обращения линейных операций, Ин-т атомн. энергии им. И. В. Курчатова, препринт ИАЭ-2220, М., 1972.
11. Kleinmichel H., Math. Nachr., **37**, H. 5/6 (1968).
12. Роозе А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **22**, 431 (1973).
13. Роозе А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **23**, 349 (1974).
14. Henrici P., Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, J. Wiley & Sons, New York — London, 1962.
15. Нечепуренко М. И., УМН, **5**, вып. 2 (1954).
16. Де Брёйн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, М., 1961.
17. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, М., 1969.
18. Дементьева А. М., ДАН СССР, **201**, № 4 (1971).
19. Дементьева А. М., Автоматика и телемеханика, № 9 (1972).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/VII 1974

A. ROOSE

ARVUTUSVIGADE MÕJU MITTELINEAARSETE VÕRRANDITE MÕNEDELE LAHENDUSALGORITMIDELE

Töös vaadeldakse kahte algoritmi mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks. Võetakse arvesse tegelikul arvutamisel tekkivaid vigu. Algoritm (5) võimaldab leida lähendi võrrandi (1) lahendile lõpliku arvu sammudega. Algoritm (6) määrab lähendite lõp-

matu jada. Teoreemid 1 ja 2 selgitavad nende algoritmide omadusi. Töö neljandas punktis rakendatakse algoritmi (6) modifikatsiooni ilmutamata funktsiooni väärtuste leidmiseks.

A. ROOSE

THE INFLUENCE OF COMPUTATIONAL ERRORS ON SOME ALGORITHMS FOR THE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS

Two algorithms for the solution of nonlinear equations are considered. The computational errors are taken into account. Algorithm (5) gives an approximation to the exact solution of equation (1) by finite number of steps. Algorithm (6) determines an infinite number of approximations. Theorems 1 and 2 show the qualities of these algorithms. At the end of the paper a modification of algorithm (6) is applied for approximating an implicit function.