EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.2.03

УДК 62—501.12—501.7

Ю. НУРГЕС, Ю. ЯАКСОО

СОКРАЩЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ВХОДАМИ И ВЫХОДАМИ

Динамику дискретной стационарной линейной системы можно описать системой разностных уравнений

$$\begin{aligned} s(t+1) &= As(t)+Bu(t), \\ z(t) &= Cs(t), \\ s(0) &= s_0, \quad t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

где s — вектор состояния размерности r, u — вектор входов размерности m, z — вектор выходов размерности p, A — переходная матрица состояния порядка $r\times r$, B — переходная матрица входов порядка $r\times m$, C — матрица выходов порядка $p\times r$.

Пусть система (1) полностью управляема и наблюдаема. Тогда сложность управляющей системы зависит от размерности вектора состояния s. Возникает задача аппроксимации системы (1) системой более низкого порядка, которая представляла бы с достаточной точностью исходную систему.

В последнее время задаче аппроксимации уделяется много внимания. Можно выделить три направления в исследованиях: а) методы, основанные на пренебрежении несущественными собственными значениями матрицы A [1]; б) методы прямой минимизации ошибки аппроксимации [2]; в) методы проекции вектора состояния [3].

Методы а) позволяют получать сравнительно простые решения задачи, но ошибку аппроксимации они не выводят и не минимизируют, считая ее достаточно малой. Применение методов б) и в) требует, как правило, решения нелинейной системы матричных уравнений.

В данной работе для вывода и минимизации ошибки аппроксимации применяется метод проекции. Введение дополнительных ограничений позволяет упростить задачу вплоть до результатов Е. Дж. Дависона [2].

Аппроксимация производится в два этапа.

1. Полностью управляемая и наблюдаемая система (1) заменяется частично управляемой и/или наблюдаемой системой

$$\begin{aligned} \hat{s}(t+1) &= \hat{A}\hat{s}(t)+\hat{B}u(t), \\ \hat{z}(t) &= \hat{C}\hat{s}(t), \\ \hat{s}(0) &= \hat{s}_0, \quad t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\hat{s}$ и $\hat{z}$ — векторы размерности r и p; $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ — матрицы порядка $r\times r$, $r\times m$ и $p\times r$ соответственно, причем ранг матрицы $\hat{A}$ равен $\hat{r}$

$$\max(m, p)\leqslant\hat{r}\leqslant r.$$

2. Полученная система (2) заменяется эквивалентной, полностью управляемой и наблюдаемой системой

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t)+Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t), \\ x(0) &= x_0, \quad t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

где x и y — векторы размерности n и p; F, G и H — матрицы порядка $n\times n$, $n\times m$ и $p\times n$ соответственно.

Разложение вектора состояния

Пусть в r-мерном пространстве S состояния системы (1) даны $\hat{r}$-мерное подпространство $\hat{S}$ и $(r-\hat{r})$-мерное подпространство $\tilde{S}$ такие, что $S=\hat{S}\oplus\tilde{S}$. Тогда вектор состояния $s(t)\in S$ определяется суммой

$$s(t)=\hat{s}(t)+\tilde{s}(t), \tag{4}$$

где $\hat{s}(t)\in\hat{S}$, $\tilde{s}(t)\in\tilde{S}$ и

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= Ps(t), \\ \tilde{s}(t) &= (I-P)s(t), \end{aligned} \tag{4a}$$

P — проекционная матрица порядка $r\times r$ ранга $\hat{r}$. В зависимости от определения подпространства $\hat{S}$ на матрицу P накладываются дополнительные требования.

А. Пусть $\hat{S}$ — управляемое подпространство системы (2). Тогда состояние системы (2) $\hat{s}_2(t)\in\hat{S}$ при $\hat{s}_0=0$ определяется выражением

$$\hat{s}_2(t)=\hat{\mathfrak{C}}(t-1)\vec{u}(t-1), \tag{5}$$

где $\hat{\mathfrak{C}}$ — матрица управляемости системы (2)

$$\hat{\mathfrak{C}}(t-1)=[\hat{B}\,\vdots\,\hat{A}\hat{B}\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,\hat{A}^{t-1}\hat{B}]$$

и

$$\vec{u}(t-1)=[u^{\mathrm{T}}(t-1)\,u^{\mathrm{T}}(t-2)\ldots u^{\mathrm{T}}(0)\,]^{\mathrm{T}}.$$

Проекция состояния системы (1) на подпространство $\hat{S}$ при $s_0=0$ определяется выражением

$$\hat{s}_1(t)=P\mathfrak{C}(t-1)\vec{u}(t-1), \tag{6}$$

где $\mathfrak{C}$ — матрица управляемости системы (1)

$$\mathfrak{C}(t-1)=[B\,\vdots\,AB\,\vdots\,\ldots\,\vdots\,A^{t-1}B].$$

Пусть

$$\hat{s}_1(t)=\hat{s}_2(t) \tag{7}$$

при любом $u(t)$, $t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Тогда из выражений (5) и (6) получим следующие дополнительные условия для проекционной матрицы P:

$$\hat{\mathfrak{C}}(t-1)=P\mathfrak{C}(t-1) \tag{8}$$

или

$$\hat{A}^t\hat{B}=PA^tB, \quad t=0,\ 1,\ 2,\ \dots . \tag{8a}$$

Б. Пусть $\hat{S}$ — наблюдаемое подпространство системы (2). Тогда при $u(t)=0,\ t=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ \hat{s}_2(0)\in\hat{S}$,

$$\vec{\hat{z}}=\hat{\mathfrak{O}}\hat{s}_2(0),$$

где $\hat{\mathfrak{O}}$ — матрица наблюдаемости системы (2)

$$\hat{\mathfrak{O}}^{\mathrm{T}}=[\hat{C}^{\mathrm{T}}\,\vdots\,\hat{A}^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\,\vdots\,(\hat{A}^2)^{\mathrm{T}}\hat{C}^{\mathrm{T}}\,\vdots\,\dots]$$

и

$$\vec{\hat{z}}^{\mathrm{T}}=[\hat{z}^{\mathrm{T}}(0)\,\hat{z}^{\mathrm{T}}(1)\,\hat{z}^{\mathrm{T}}(2)\dots].$$

Для системы (1) при $u(t)=0,\ t=0,\ 1,\ 2,\ \dots$,

$$\vec{z}=\mathfrak{O}\hat{s}_1(0)+\mathfrak{O}s_1(0),$$

где $\mathfrak{O}$ — матрица наблюдаемости системы (1)

$$\mathfrak{O}^{\mathrm{T}}=[C^{\mathrm{T}}\,\vdots\,A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\,\vdots\,(A^2)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}\,\vdots\,\dots]$$

и

$$\vec{z}^{\mathrm{T}}=[z^{\mathrm{T}}(0)\,z^{\mathrm{T}}(1)\,z^{\mathrm{T}}(2)\dots].$$

Предполагая $\hat{s}_2(0)=Ps(0)=\hat{s}_1(0)$, требуем

$$\vec{\hat{z}}=\mathfrak{O}\hat{s}_1(0). \tag{9}$$

Тогда при любом $s(0)\in S$ справедливо равенство

$$(\mathfrak{O}-\hat{\mathfrak{O}})Ps(0)=0,$$

возможное только при

$$(\mathfrak{O}-\hat{\mathfrak{O}})P=0. \tag{10}$$

Так как $\hat{S}$ является наблюдаемым подпространством системы (2), то

$$\hat{\mathfrak{O}}(I-P)s(0)=0. \tag{11}$$

Из выражений (10) и (11) получим

$$\hat{\mathfrak{O}}=\mathfrak{O}P \tag{12}$$

или

$$\hat{C}\hat{A}^t=CA^tP, \quad t=0,\ 1,\ 2,\ \dots . \tag{12a}$$

В. Пусть $\hat{S}$ — как управляемое, так и наблюдаемое подпространство системы (2) и требования (7) и (9) выполняются. Тогда проекционная матрица должна удовлетворять требованиям (8) и (12).

Ошибка аппроксимации и критерий минимизации

Ошибка аппроксимации определяется разницей

$$\varepsilon=\sum_{t=0}^{\infty}\|z(t)-y(t)\|^2 \tag{13}$$

при некоторых стандартных входных сигналах $u(t)$. Ошибка возникает только на первом этапе аппроксимации при переходе от системы (1) к системе (2). Системы (2) и (3) эквивалентны. Тогда (13) примет вид

$$\varepsilon = \|\vec{z} - \hat{\vec{z}}\|^2. \tag{13a}$$

Пусть $u(t) = 0$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда [4]

$$\vec{z} = \mathfrak{H}\vec{u},$$

где $\mathfrak{H}$ — ганкелева матрица системы (1)

$$\mathfrak{H} = \begin{bmatrix} M(0) & M(1) & M(2) \ldots \\ M(1) & M(2) & M(3) \ldots \\ M(2) & M(3) & M(4) \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$M(\cdot)$ — матрица марковских параметров системы (1)

$$M(i) = CA^iB$$

и

$$\vec{u}^{\mathrm{T}} = [u^{\mathrm{T}}(-1)\,u^{\mathrm{T}}(-2)\ldots].$$

Аналогично

$$\hat{\vec{z}} = \hat{\mathfrak{H}}\vec{u},$$

где $\hat{\mathfrak{H}}$ — ганкелева матрица системы (2)

$$\hat{\mathfrak{H}} = \begin{bmatrix} \hat{M}(0) & \hat{M}(1) & \hat{M}(2) \ldots \\ \hat{M}(1) & \hat{M}(2) & \hat{M}(3) \ldots \\ \hat{M}(2) & \hat{M}(3) & \hat{M}(4) \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$\hat{M}(\cdot)$ — матрица марковских параметров системы (2)

$$\hat{M}(i) = \hat{C}\hat{A}^i\hat{B}.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \|(\mathfrak{H} - \hat{\mathfrak{H}})\vec{u}\|^2 \leqslant \|\mathfrak{H} - \hat{\mathfrak{H}}\|^2 \|\vec{u}\|^2.$$

Если $u(t) = 0$ везде, кроме момента времени $t = -1$, то

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \|[M(i) - \hat{M}(i)]u(-1)\|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \|M(i) - \hat{M}(i)\|^2 \|u(-1)\|^2.$$

В качестве критерия минимизации в вариантах А и Б выбираем

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \|M(i) - \hat{M}(i)\|^2.$$

Легко проверить, что в варианте А при условии

$$\hat{C} = C \tag{14}$$

критерий минимизации приобретает вид

$$J_А = \|C\mathfrak{C} - CP\mathfrak{C}\|^2, \tag{15}$$

где

$$\mathfrak{C} = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \ldots].$$

В варианте Б при условии

$$\hat{B} = B \tag{16}$$

имеем

$$J_Б = \|\mathfrak{D}B - \mathfrak{D}PB\|^2. \tag{17}$$

За критерий минимизации в варианте В принимаем

$$J_В = \|\mathfrak{H} - \hat{\mathfrak{H}}\|^2.$$

Учитывая равенства $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}\mathfrak{C}$, $\hat{\mathfrak{H}} = \hat{\mathfrak{D}}\hat{\mathfrak{C}}$ и свойство проекционной матрицы $P = P^2$, получаем

$$J_В = \|\mathfrak{D}\mathfrak{C} - \mathfrak{D}P\mathfrak{C}\|^2. \tag{18}$$

Проекционная матрица

Проекционная матрица P выбирается такой, чтобы она минимизировала критерий J и удовлетворяла дополнительным требованиям соответственно выбранному варианту.

А. Минимизация функционала (15) относительно матрицы P при ограничениях (8) или (8а) представляет собой весьма трудную задачу ввиду неизвестности матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Более подходящим ограничением является

$$PA = PAP, \tag{19}$$

которое при

$$\hat{A} = PA, \tag{20}$$

$$\hat{B} = PB \tag{21}$$

гарантирует выполнение равенств (8) и (8а).

Известно, что проекционная матрица P ранга $\hat{r}$ может быть представлена в виде

$$P = I - RS^{\tau}, \tag{22}$$

где R и S — матрицы порядка $r \times (r - \hat{r})$ ранга $r - \hat{r}$ и

$$S^{\tau}R = I. \tag{23}$$

Подставляя матрицу P из (22) в выражение критерия (15), после несложных преобразований получаем

$$J_А = \operatorname{tr} CRS^{\tau}WSR^{\tau}C^{\tau},$$

где tr обозначает след квадратичной матрицы и $W = \mathfrak{C}\mathfrak{C}^{\tau}$. Составим функцию Лагранжа для минимизации функционала $J_А$ при ограничениях (19) и (23)

$$\mathfrak{L}_А = \operatorname{tr} CRS^{\tau}WSR^{\tau}C^{\tau} + \operatorname{tr} L_{А1}(S^{\tau}R - I) + \operatorname{tr} L_{А2}(ARS^{\tau} - RS^{\tau}ARS^{\tau}),$$

где $L_{А1}$ и $L_{А2}$ — матрицы множителей Лагранжа. Минимум функционала $J_А$ по R и S достигается при

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_A}{\partial R} = 2C^{\tau}CRS^{\tau}WS + SL^{\tau}_{А1} + A^{\tau}L^{\tau}_{А2}S - L^{\tau}_{А2}SR^{\tau}A^{\tau}S - A^{\tau}SR^{\tau}L^{\tau}_{А2}S = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_A}{\partial S^{\text{т}}} = 2WSR^{\text{т}}C^{\text{т}}CR + L^{\text{т}}_{A1}R^{\text{т}} + R^{\text{т}}A^{\text{т}}L^{\text{т}}_{A2} - R^{\text{т}}L^{\text{т}}_{A2}SR^{\text{т}}A^{\text{т}} - R^{\text{т}}A^{\text{т}}SR^{\text{т}}L^{\text{т}}_{A2} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_A}{\partial L_{A1}} = S^{\text{т}}R - I = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_A}{\partial L_{A2}} = ARS^{\text{т}} - RS^{\text{т}}ARS^{\text{т}} = 0.$$

Для упрощения задачи найдем матрицу R, которая обеспечит выполнение ограничения (19), и проведем минимизацию функционала J_A относительно матрицы S при фиксированной R. Можно показать, что ограничение (19) выполняется, если

$$AR = RK,$$

где K — любая матрица порядка $(r-\hat{r}) \times (r-\hat{r})$, т. е. если подпространство, натянутое на столбцы матрицы R, инвариантно относительно матрицы A. В частности, равенство (19) выполняется, если матрица R составлена из собственных векторов матрицы A. Минимум функционала J_A по S достигается при

$$S = W^{-1}R(R^{\text{т}}W^{-1}R)^{-1}$$

и равняется

$$\min_S J_A = \operatorname{tr} CR(R^{\text{т}}W^{-1}R)^{-1}R^{\text{т}}C^{\text{т}}.$$

Б. Уравнения (12) и (12a) удовлетворяются, если

$$AP = PAP \tag{24}$$

и

$$\hat{A} = AP, \tag{25}$$

$$\hat{C} = CP. \tag{26}$$

С учетом требований (22) и (23) критерий (17) приводится к виду

$$J_{\text{Б}} = \operatorname{tr} B^{\text{т}}SR^{\text{т}}VRS^{\text{т}}B,$$

где $V = \mathfrak{D}^{\text{т}}\mathfrak{D}$.
Минимум функционала $J_{\text{Б}}$ достигается при

$$2VRS^{\text{т}}BB^{\text{т}}S + SL^{\text{т}}_{\text{Б}1} + L^{\text{т}}_{\text{Б}2}A^{\text{т}}S - L^{\text{т}}_{\text{Б}2}SR^{\text{т}}A^{\text{т}}S - A^{\text{т}}SR^{\text{т}}L^{\text{т}}_{\text{Б}2}S = 0,$$
$$2R^{\text{т}}VRS^{\text{т}}BB^{\text{т}} + L^{\text{т}}_{\text{Б}1}R^{\text{т}} + R^{\text{т}}L^{\text{т}}_{\text{Б}2}A^{\text{т}} - R^{\text{т}}L^{\text{т}}_{\text{Б}2}SR^{\text{т}}A^{\text{т}} - R^{\text{т}}A^{\text{т}}SR^{\text{т}}L^{\text{т}}_{\text{Б}2} = 0,$$
$$S^{\text{т}}R - I = 0,$$
$$RS^{\text{т}}A - RS^{\text{т}}ARS^{\text{т}} = 0,$$

где $L_{\text{Б}1}$ и $L_{\text{Б}2}$ — матрицы множителей Лагранжа.
Если

$$A^{\text{т}}S = SK,$$

то минимум функционала $J_{\text{Б}}$ по R достигается при

$$R = V^{-1}S(S^{\text{т}}V^{-1}S)^{-1}$$

и равняется

$$\min_R J_{\text{Б}} = \operatorname{tr} B^{\text{т}}S(S^{\text{т}}V^{-1}S)^{-1}S^{\text{т}}B.$$

В. Требования (8) и (8а), (12) и (12а) удовлетворяются, если выполняются равенства (19)—(21) и (24)—(26). Тогда критерий (18) принимает вид

$$J_{\mathrm{B}}=\mathrm{tr}\,RS^{\mathrm{T}}WSR^{\mathrm{T}}V.$$

Минимум функционала J_{B} достигается при

$$2VRS^{\mathrm{T}}WS+SL^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}1}+A^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}2}S-L^{\mathrm{T}}_{\mathrm{B}2}A^{\mathrm{T}}S=0,$$

$$2WSR^{\mathrm{T}}VR+RL_{\mathrm{B}1}+L_{\mathrm{B}2}AR-AL_{\mathrm{B}2}R=0,$$

$$S^{\mathrm{T}}R-I=0,$$

$$ARS^{\mathrm{T}}-RS^{\mathrm{T}}A=0,$$

где $L_{\mathrm{B}1}$ и $L_{\mathrm{B}2}$ — матрицы множителей Лагранжа.

Ограничения (19) и (24) выполняются, если

$$RS^{\mathrm{T}}=U\left[\begin{array}{c:c} I_{r-\hat{r}} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right]U^{-1},$$

где U — матрица порядка $r\times r$, приводящая матрицу A к нормальной жордановой форме A_J, т. е.

$$A=UA_JU^{-1}.$$

Разбивая матрицу U на блоки размерами $r\times(r-\hat{r})$ и $r\times\hat{r}$, а матрицу U^{-1} на блоки размерами $(r-\hat{r})\times r$ и $\hat{r}\times r$

$$U=[U_1 \,\vdots\, U_2],$$

$$U^{-1}=\left[\begin{array}{c} U_3 \\ \hdashline U_4 \end{array}\right],$$

можно сопоставить $R=U_1$, $S=U_3^{\mathrm{T}}$.
Тогда

$$P=U_2U_4. \tag{27}$$

Размерность $\hat{r}$ следует выбирать такой, чтобы жордановы блоки не расщеплялись. Результаты, полученные в [1], показали, что их целесообразнее группировать таким образом, чтобы матрице U_1 (и U_3) соответствовали блоки с наименьшими собственными значениями матрицы A.

Упрощенная система

Параметры частично управляемой и/или наблюдаемой системы (2) определяют из уравнений (14), (16), (20), (21), (25), (26) в зависимости от выбранного варианта.

Так как ранг $\hat{\mathfrak{D}}\hat{\mathfrak{C}}=n<r$, то найдется неособенная матрица T порядка $r\times r$ такая, что

$$\bar{A}=T\hat{A}T^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{33} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\bar{B}=T\hat{B}=\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$\bar{C}=\hat{C}T^{-1}=[\bar{C}_1\ 0\ \bar{C}_3], \tag{30}$$

где $\bar{A}_{11}$, $\bar{B}_1$ и $\bar{C}_1$ — матрицы порядка $n\times n$, $n\times m$ и $p\times n$ соответственно [5]. Эквивалентная система (3) определяется подстановкой

$$F=\bar{A}_{11},$$
$$G=\bar{B}_1,$$
$$H=\bar{C}_1,$$
$$x_0=\bar{T}Ps_0,$$

где $\bar{T}$ — матрица, составленная из первых n строк матрицы T.

Для определения матрицы T можно использовать полученные выше результаты. Пусть X_1 матрица порядка $(r-\hat{r})\times r$ ранга $r-\hat{r}$ такая, что

$$X_1P=0.$$

Составим неособенную матрицу порядка $r\times r$: $T_1=\left[\begin{array}{c}X_2\\ \hdashline X_1\end{array}\right]$.

Тогда

$$\tilde{A}=T_1\hat{A}T_1^{-1}=\left[\begin{array}{c}X_2\hat{A}T_1^{-1}\\ \hdashline 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12}\\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{0}\end{array}\right],$$

$$\tilde{B}=T_1\hat{B}=\left[\begin{array}{c}X_2\hat{B}\\ \hdashline 0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\tilde{B}_1\\ \hdashline 0\end{array}\right],$$

$$\tilde{C}=\hat{C}T_1^{-1}=[\tilde{C}_1 \,\vdots\, \tilde{C}_2],$$

где $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{B}_1$ и $\tilde{C}_1$ — матрицы порядка $\hat{r}\times\hat{r}$, $\hat{r}\times m$ и $p\times\hat{r}$ соответственно. Очевидно, система (2) эквивалентна системе с параметрами $\tilde{A}_{11}$, $\tilde{B}_1$ и $\tilde{C}_1$.

Если

$$\text{ранг } \tilde{\mathfrak{D}}\tilde{\mathfrak{C}}=\hat{r},$$

где

$$\tilde{\mathfrak{D}}^{\mathrm{T}}=[\tilde{C}_1^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \tilde{A}_{11}^{\mathrm{T}}\tilde{C}_1^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, (\tilde{A}_{11}^{\mathrm{T}})^{\hat{r}-1}\tilde{C}^{\mathrm{T}}],$$

$$\tilde{\mathfrak{C}}=[\tilde{B}_1 \,\vdots\, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \tilde{A}_{11}^{\hat{r}-1}\tilde{B}_1],$$

то $n=\hat{r}$, $T=T_1$ и

$$F=\tilde{A}_{11},$$
$$G=\tilde{B}_1,$$
$$H=\tilde{C}_1.$$

В противном случае $n<\hat{r}$ и найдется неособенная матрица T_2 порядка $\hat{r}\times\hat{r}$, приводящая тройку $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ к виду (28)—(30).

Матрицу X_1 можно составить из линейно независимых строк матрицы RS^{T}.

Если выполняется равенство (27), то $T_1=U^{-1}$ и

$$\tilde{A}_{11}=U_4AU_2,$$
$$\tilde{B}_1=U_4B,$$
$$\tilde{C}_1=CU_2.$$

Заключение

С помощью проекционного метода найдены аппроксимации дискретной линейной динамической системы. В зависимости от определения подпространства проектирования получены три варианта аппроксимаций. Вариант А с управляемым подпространством проектирования обобщает и подтверждает результаты Д. Митра [3] для непрерывных систем. В варианте Б использован дуальный подход с наблюдаемым подпространством проектирования. Варианты А и Б кажутся равносильными относительно трудоемкости, но при различном количестве входов и выходов, особенно при специальной форме представления системы (1), может тот или другой иметь явные преимущества. Вариант В с управляемым и наблюдаемым подпространством проектирования позволяет сформулировать более универсальный критерий минимизации. При строгих ограничениях этот вариант дает аналогичные методу Дависона [1] результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilson R. G., Fisher D. G., Seborg D. E., Int. J. Control, **16**, No. 3, 549—558 (1972).
2. Aplevich J. D., Int. J. Control, **17**, No. 3, 565—575 (1973).
3. Mitra D., IFAC IV Congress, Warszawa, technical session, No. 67, 19—34 (1969).
4. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, М., 1971.
5. Silverman L. M., IEEE Trans. Automatic Control, **16**, No. 6, 554—567 (1971).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
3/VI 1974

Ü. NURGES, Ü. JAAKSOO

MITME SISENDI JA VÄLJUNDIGA LINEAARSE DÜNAAMILISE SÜSTEEMI JÄRGU ALANDAMINE

Olekuvektori projektsiooni meetodil on leitud diskreetse lineaarse süsteemi lähend. Lähendamine toimub kahes etapis. Algul leitakse osaliselt juhitav või/ja jälgitav süsteem, mis asendatakse seejärel ekvivalentse täielikult juhitava ja jälgitava madalamat järku süsteemiga. On vaadeldud ülesande kolme varianti, kus lähtesüsteemi olekuvektori projektsiooni alamruum on ühtlasi lähendsüsteemi juhitavuse või/ja jälgitavuse ruum.

Ü. NURGES, Ü. JAAKSOO

REDUCTION OF MULTIPLE INPUT/MULTIPLE OUTPUT LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

This paper is concerned with internal reduction of a completely controllable and completely observable dynamical system (1) of the order r by the completely controllable and observable system (3) of the order $n(n<r)$. This approximation problem is twofold: at first the system (1) is projected on an n dimensional subspace, which in turn results in a partly controllable and/or observable system (2). The next step is to replace the system (2) by the equivalent completely controllable and completely observable system (3) of the order n. The subspaces on which the state vector is projected are studied, and the corresponding projection matrices are derived.