EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED 24. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975. NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.2.02

УДК 62—501.12—503.3

Ю. НУРГЕС

О ЧАСТИЧНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ОЦЕНОК ЕЕ МАРКОВСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Любую динамическую систему можно представить посредством моделей двух типов: а) типа вход—выход (внешнее описание) и б) типа вход—состояние—выход (внутреннее описание). В зависимости от поставленных задач та или другая модель может иметь преимущества. Во многих случаях внешнее описание получается сравнительно просто из экспериментальных данных. Для решения задачи управления более подходящим является внутреннее описание. Поэтому проблема перехода от внешнего описания к внутреннему (проблема реализации) имеет большое значение. Р. Калманом [1] выработана теория и вместе с Б. Хо получен практический алгоритм реализации для линейных стационарных систем. Ту же проблему при конечном числе входных—выходных данных (частичная реализация) исследует А. Тейтер [2]. Дж. Риссанен и Т. Кайлат рассматривают проблему частичной реализации для узкой разновидности стохастических систем [3].

В данной работе сделана попытка решить проблему частичной реализации для системы, представленной оценкой своего внешнего описания. Именно такая задача возникает в инженерной практике. Поскольку любые экспериментальные данные в принципе случайны, следовательно, и вычисленные по этим данным параметры внешнего описания представляют собой лишь оценки реальных параметров. При использовании для решения изложенной задачи метода реализации детерминированных систем возникают специфические проблемы, заслуживающие исследования.

Проблема реализации. Размерность системы

Рассмотрим линейную дискретную систему, заданную своим отображением вход—выход в виде бесконечной последовательности матриц $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$, ... порядка $m\times p$ или бесконечной в двух направлениях блочной ганкелевой матрицей

$$\mathfrak{H}=\begin{bmatrix} M(1) & M(2) & M(3)\dots \\ M(2) & M(3) & M(4)\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где m — число входов системы, p — число выходов системы; $M(i)$ — матрица марковских параметров системы, k-й элемент j-й строки которой равняется величине j-го выхода через i интервал времени после подачи единичного импульса на k-й вход. Проблема реализации системы заключается в отыскании тройки матриц (A, B, C) внутреннего описания системы

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t)+Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{2}$$

где u — вектор входов, y — вектор выходов, x — вектор состояния размерности n, A — переходная матрица состояния порядка $n \times n$, B — переходная матрица входов порядка $n \times m$, C — матрица выходов порядка $p \times n$ такие, что

$$M(i) = CA^{i-1}B, \quad i=1, 2, \ldots .$$

Проблема минимальной реализации заключается в отыскании такой тройки (A, B, C), чтобы размерность n оказалась минимальной.

Как известно [2], линейная динамическая система имеет конечномерную реализацию, если существуют числа α и β такие, что

$$\varrho(\mathfrak{H}_{\alpha,\beta}) = \varrho(\mathfrak{H}_{\alpha+i,\beta+j}) = n,$$

где ϱ обозначает ранг матрицы, $i = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 0, 1, 2, \ldots$;

$$\mathfrak{H}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} M(1) & M(2) & \ldots M(\beta) \\ M(2) & M(3) & \ldots M(\beta+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ M(\alpha) & M(\alpha+1) & \ldots M(\alpha+\beta-1) \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим систему, заданную последовательностью оценок матриц марковских параметров $\hat{M}(1)$, $\hat{M}(2)$, $\hat{M}(3)$, ... или соответствующей ганкелевой матрицей

$$\hat{\mathfrak{H}} = \begin{bmatrix} \hat{M}(1) & \hat{M}(2) & \ldots \\ \hat{M}(2) & \hat{M}(3) & \ldots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Пусть матрицы $\hat{M}(i)$ представимы суммой

$$\hat{M}(i) = M(i) + \Delta(i), \tag{4}$$

где $\Delta(i)$, $i = 1, 2, \ldots$, матрицы порядка $p \times m$, элементы которых являются непрерывными случайными величинами без функциональной зависимости между ними при любых i. Постараемся решить проблему минимальной реализации для системы (3) при ограничениях (4), оперируя матрицей $\hat{\mathfrak{H}}$ как вполне детерминированной. Для определения размерности минимальной реализации воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Матрица, элементы которой являются непрерывными случайными величинами, имеет максимальный ранг с вероятностью 1, если между ее элементами не существует функциональной зависимости.*

Доказательство леммы тривиально и основывается на факте, что непрерывная случайная величина приобретает какое-нибудь определенное значение с вероятностью 0.

Следствие. Динамическая система (3) при условиях (4) не имеет конечномерной реализации с вероятностью 1.

Первая блок-строка матрицы $\hat{\mathfrak{H}}$ имеет по лемме максимальный ранг. Ввиду блок-ганкелевой структуры матрицы $\hat{\mathfrak{H}}$ элементы следующих блок-строк определяются соотношением

$$\hat{m}_{p+i,j}=\hat{m}_{i,m+j}, \quad i, j=1,\ 2,\ \ldots .$$

Убедимся, что утверждение леммы остается в силе и при такой функциональной зависимости. Так как $p\times p$ подматрица в левом верхнем углу матрицы $\hat{\mathfrak{H}}$ несингулярна, то найдется вектор γ_p такой, что

$$[\hat{m}_{1,m+1}\ldots\hat{m}_{1,m+p}]=[\hat{m}_{p+1,1}\ldots\hat{m}_{p+1,p}]=\gamma_p^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\hat{m}_{1,1}\ldots\hat{m}_{1,p}\\ \cdot \quad\quad \cdot\\ \cdot \quad\quad \cdot\\ \hat{m}_{p,1}\ldots\hat{m}_{p,p}\end{bmatrix}.$$

Вероятность

$$p\,(\hat{m}_{p+1,p+1}=\hat{m}_{1,m+p+1}=\gamma_p^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\hat{m}_{1,p+1}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \hat{m}_{p,p+1}\end{bmatrix}\,|\hat{m}_{1,p+1},\ \ldots,\ \hat{m}_{p,p+1})=0,$$

так как $\hat{m}_{1,m+p+1}$ имеет непрерывное распределение и не зависит функционально от $\hat{m}_{1,p+1},\ \ldots,\ \hat{m}_{p,p+1}$. Следовательно, первые $p+1$ строк (столбцов) матрицы $\hat{\mathfrak{H}}$ линейно независимы с вероятностью 1. Доказательство того, что ганкелева матрица $\hat{\mathfrak{H}}_{i,j}$ имеет максимальный ранг с вероятностью 1 при любых i и j, аналогично. Следовательно, таких чисел α и β, чтобы

$$\varrho\,(\hat{\mathfrak{H}}_{\alpha,\beta})=\varrho\,(\hat{\mathfrak{H}}_{\alpha+i,\beta+j}),$$

с вероятностью 1 не найдется, т. е. конечномерной реализации не существует.

Проблема частичной реализации

Проблема реализации имеет смысл только при конечномерных системах. В случае бесконечномерных систем возникает проблема частичной реализации, которая заключается в следующем: аппроксимировать данную бесконечномерную систему такой конечномерной системой, чтобы определенное число первых матриц марковских параметров обеих систем оказались равными. Такая же проблема возникает, если имеется неполная информация об отображении вход—выход, т. е. если дана конечная последовательность матриц $M(i)$, $i=1,\ \ldots,\ l$. Внутреннее описание (2) называется частичной реализацией порядка l системы (1), если

$$M(i)=CA^{i-1}B, \quad i=1,\ \ldots,\ l.$$

А. Тейтер [2] показал, что существует минимальная частичная реализация порядка l с размерностью

$$n=\varrho\,(\mathfrak{H}_{1,l})+[\varrho\,(\mathfrak{H}_{2,l-1})-\varrho\,(\mathfrak{H}_{1,l-1})]+\ldots+[\varrho\,(\mathfrak{H}_{l,1})-\varrho\,(\mathfrak{H}_{l-1,1})]. \qquad (5)$$

Для системы (3) при ограничениях (4) имеем с вероятностью 1

$$\varrho(\hat{\mathfrak{H}}_{1,l}) = p$$

и

$$\varrho(\hat{\mathfrak{H}}_{k,l-k+1}) - \varrho(\hat{\mathfrak{H}}_{k-1,l-k+1}) = \begin{cases} p, \text{ если } kp \leqslant (l-k+1)m, \\ \gamma, \text{ если } kp > (l-k+1)m \geqslant (k-1)p, \\ 0, \text{ если } (k-1)p > (l-k+1)m, \end{cases}$$

где

$$\gamma = (l-\delta)m - \min[\delta p, (l-\delta)m],$$

δ — целая часть от дроби $\frac{(l+1)m}{p+m}$. Подставив последние равенства в выражение (5), получим минимальную размерность частичной реализации порядка l системы (3) с вероятностью 1, равной

$$n = \delta p + \gamma.$$

Каноническая форма

Минимальная реализация не является единственной. Существует целый класс внутренних описаний (2) минимальной размерности, эквивалентных с внешним описанием (1). Представляет интерес задача отыскания тройки (A, B, C), обладающей определенными специальными свойствами и называемой канонической формой системы (2).

Теорема. *Частичная реализация системы* (3) *приводима к канонической форме*

$$A = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{n-p} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{D} \end{array}\right],$$
$$C = [I_p \,\vdots\, 0], \tag{6}$$
$$B = B$$

с вероятностью 1, если ограничения (4) *выполняются.*

Система (3) приводима к канонической форме (6), если n первых строк ее ганкелевой матрицы линейно независимы [4]. Можно показать, что существует последовательность матриц $M(l+1)$, $M(l+2), \ldots$ такая, что ранг ганкелевой матрицы

$$\bar{\mathfrak{H}} = \begin{bmatrix} \hat{M}(1) & \hat{M}(2) & \ldots & \hat{M}(l-1) & \hat{M}(l) & M(l+1) & \ldots \\ \hat{M}(2) & \hat{M}(3) & \ldots & \hat{M}(l) & M(l+1) & M(l+2) & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{7}$$

определяется формулой (5) и внутреннее описание системы (7) является частичной реализацией порядка l системы (3). Аналогично доказательству следствия можно доказать, что n первых строк матрицы $\bar{\mathfrak{H}}$ линейно независимы с вероятностью 1, если ограничения (4) выполняются. Следовательно, частичная реализация системы (3) приводима к канонической форме (6) с вероятностью 1.

Решим проблему частичной реализации системы (3) с учетом существования канонической формы (6). Определим матрицу

$$E_n^m = \begin{cases} [I_m \vdots 0_{n-m}^m], & \text{если} \quad m<n, \\ \begin{bmatrix} I_n \\ \cdots \\ 0_n^{m-n} \end{bmatrix}, & \text{если} \quad m>n, \\ I_m, & \text{если} \quad m=n, \end{cases}$$

где I_m — единичная матрица порядка $m \times m$, 0_n^m — нулевая матрица порядка $m \times n$. При канонической форме представления (6) системы матрица управляемости имеет вид

$$\mathfrak{C} = [B \vdots AB \vdots \ldots \vdots A^{\mu-1}B] = E_*^n \bar{\mathfrak{H}} E_{m(\mu-1)}^* \tag{8}$$

и матрица наблюдаемости —

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ \cdots \\ D \\ \cdots \\ * \end{bmatrix}, \tag{9}$$

причем

$$\mathfrak{D}\mathfrak{C} = \bar{\mathfrak{H}}_{\nu,\mu}, \tag{10}$$

где μ — индекс управляемости, ν — индекс наблюдаемости и * обозначает несущественное, но подходящее число (матрицу). Из соотношения (8) получим

$$B = E_*^n \bar{\mathfrak{H}} E_m^*,$$

а из соотношений (9) и (10) —

$$D = H\mathfrak{C}^+ + Z(I_n - \mathfrak{C}\mathfrak{C}^+), \tag{11}$$

где H — матрица порядка $p \times n\mu$, составленная из $n+1, \ldots, n+p$ строк матрицы $\hat{\mathfrak{H}}_{\nu,\mu}$, Z — произвольная матрица порядка $p \times n$ и

$$\mathfrak{C}^+ = \mathfrak{C}^\tau (\mathfrak{C}\mathfrak{C}^\tau)^{-1}.$$

Элементы матрицы H заданы последовательностью матриц $\hat{M}(1), \ldots$ $\ldots, \hat{M}(l)$ лишь частично. Остальные элементы матрицы H состоят из последовательности $M(l+1), M(l+2), \ldots$, которая никак не влияет на параметры внутреннего описания. По этой же причине достаточно оперировать не всей матрицей управляемости $\mathfrak{C}$, а лишь той ее частью, которая влияет на заданные элементы матрицы H. Выделим следующие подматрицы

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \cdots \\ D_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} (\delta+1)p-n \\ \} n-\delta p, \end{matrix}$$

$$\bar{\mathfrak{H}}_{\delta+1,l-\delta} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \cdots \\ H_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} (\delta+1)p-n, \end{matrix}$$

$$\bar{\mathfrak{H}}_{\delta+2,l-\delta-1} = \begin{bmatrix} H_3 \\ \cdots \\ H_4 \\ \cdots \\ H_5 \\ \cdots \\ H_6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} (\delta+1)p-n \\ \} n-\delta p \\ \} \delta+p-n. \end{matrix}$$

Учитывая сказанное выше, получим из уравнения (11) следующие формулы для вычисления матрицы D:

$$D_1 = H_2 H_1^{+} + Z_1 (I_n - H_1 H_1^{+}),$$

$$D_2 = H_5 H_3^{+} + Z_2 (I_n - H_3 H_3^{+}),$$

где

$$H_1^{+} = H_1^{\mathrm{T}} (H_1 H_1^{\mathrm{T}})^{-1},$$

$$H_3^{+} = (H_3^{\mathrm{T}} H_3)^{-1} H_3^{\mathrm{T}},$$

Z_1 и Z_2 — любые матрицы порядка $[(\delta+1)p - n] \times n$ и $(n - \delta p) \times n$ соответственно.

Если $\gamma = 0$, то $n = \delta p$ и $D = D_1$. Если $m(l - \delta) = n$, то матрица H_1 неособенная и $D_1 = H_2 H_1^{-1}$.

Рекурсивный алгоритм

Учитывая случайный характер оценок марковских параметров $\hat{M}(i)$, сформулируем задачу частичной реализации системы (3) по-другому: найти тройку (A, B, C) такую, чтобы

$$\mathrm{vec}^{\mathrm{T}}[\hat{M}(i) - CA^{i-1}B] P^{-1}(i) \mathrm{vec}[\hat{M}(i) - CA^{i-1}B] \leqslant \sigma^2(i), \quad i = 1, 2, \ldots, l, \tag{12}$$

где $P(i)$ — ковариационная матрица порядка $mp \times mp$ вектора марковских параметров $\mathrm{vec}\, M(i)$, $\sigma(i)$ — заданная постоянная.

Очевидно, неравенство (12) выполняется, если тройка (A, B, C) является частичной реализацией системы (3) порядка l. Найдем частичную реализацию системы (3) минимального порядка, удовлетворяющую неравенству (12). Отметим, что при вычислении матриц B и D нет необходимости оперировать ганкелевой матрицей $\hat{\mathfrak{H}}$ как блочной.

Получим рекурсивный алгоритм, который требует следующих операций:

1. Выделить матрицу $\hat{\mathfrak{H}}_j$ порядка $j \times j$, $j \geqslant m$, $j \geqslant p$, из левого верхнего угла ганкелевой матрицы $\hat{\mathfrak{H}}$.

2. Вычислить обратную матрицу $\hat{\mathfrak{H}}_j^{-1}$. При этом можем использовать метод окаймления, так как матрицы $\mathfrak{H}_j$ являются неособенными при любых j с вероятностью 1.

3. Выделить матрицу $\hat{\mathfrak{H}}_{jp}$ порядка $p \times j$ из ганкелевой матрицы $\hat{\mathfrak{H}}$ непосредственно под блоком $\hat{\mathfrak{H}}_j$.

4. Вычислить матрицу $D_j = \hat{\mathfrak{H}}_{jp} \hat{\mathfrak{H}}_j^{-1}$.

5. Внутреннее описание, реализующее блок $\left[\begin{array}{c} \hat{\mathfrak{H}}_j \\ \hdashline \hat{\mathfrak{H}}_{jp} \end{array}\right]$, принимает вид

$$A_j = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I_{j-p} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{D_j} \end{array}\right],$$

$$B_j = \hat{\mathfrak{H}}_j E_m^j,$$

$$C_j = E_j^p,$$

причем размерность системы равна j.

6. Вычислить матрицы

$$M_j(i) = B_j A_j^{i-1} C_j.$$

Ввиду канонической формы тройки (A_j, B_j, C_j) целесообразно провести вычисления в два этапа.

Во-первых, составить матрицу

$$\bar{Q}_{jk} = \left[\begin{array}{c} \bar{Q}_{j(k-1)} \\ \hdashline Q_{jk} \end{array} \right],$$

где $0 \leqslant k < l - \alpha_j + 1$, α_j — целая часть от дроби j/p,

$$Q_{jk} = D_j [0_{kp}^{j} \vdots I_j] \bar{Q}_{j(k-1)},$$
$$Q_{j0} = B_j.$$

Очевидно,

$$Q_{jk} = \hat{\mathfrak{H}}_{jp} \left[\begin{array}{c} 0_m^{(k-1)m} \\ \hdashline I_m \\ \hdashline 0_m^{j-km} \end{array} \right],$$

если $k \leqslant \beta_j$, где β_j — целая часть от дроби j/m.

Во-вторых, разбить матрицу $\bar{Q}_{jk}$ на $k + \alpha_j$ блоки порядка $p \times m$ и на остаточный блок порядка $(j - \alpha_j p) \times m$. Тогда

$$\bar{Q}_{jk} = \left[\begin{array}{c} M_j(1) \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline M_j(k+\alpha_j) \end{array} \right].$$

7. Проверить выполнение условия (12) при $\alpha_j + \beta_j - 1 < i \leqslant l$ (при $i \leqslant \alpha_j + \beta_j - 1$ очевидно $M_j(i) = \hat{M}(i)$). Если неравенство (12) выполняется, тройка (A_j, B_j, C_j) является частичной реализацией в принятом выше смысле. В противном случае следует вернуться к пункту 1, увеличив j на единицу.

Заключение

Найдена частичная реализация линейной динамической системы по оценке ее ганкелевой матрицы. Доказано, что частичная реализация приводима к канонической форме (6) с вероятностью 1, если выполняются ограничения (4). Надо отметить, что, кроме перечисленных в [4] преимуществ, каноническая форма (6) позволяет вывести простые формулы для определения матриц реализации.

Недостатком метода является прямая зависимость размерности n частичной реализации от порядка реализации l. Модифицирование задачи частичной реализации позволяет использовать рекурсивный алгоритм для вычисления матриц реализации и значительно уменьшить отмеченный недостаток. При необходимости можно провести дальнейшее сокращение размерности полученной реализации путем исключения несущественных компонент вектора состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М., Очерки по математической теории систем, М., 1971.
2. Tether A., IEEE Trans. Automatic Control, **15**, No. 4, 427—436 (1970).
3. Rissanen J., Kailath T., Automatica, **8**, No. 4, 389—396 (1972).
4. Нургес Ю., Яаксоо Ю., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, № 3 (1975).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18/IX 1974

Ü. NURGES

LINEAARSE SÜSTEEMI OSALISEST REALISEERIMISEST TEMA MARKOVI PARAMEETRITE HINNANGUTE ALUSEL

Vaadeldakse lineaarse dünaamilise süsteemi realiseerimist juhul, kui ta väline kirjeldus on esitatud lõpliku Markovi parameetrite maatriksite jadaga. Näidatakse, et osaline realiseering on viidav kanoonilisele kujule (6) tõenäosusega 1, kui Markovi parameetrite hinnangud rahuldavad tingimust (4). Esitatakse rekursiivne algoritm modifitseeritud realiseerimisülesande lahendamiseks.

Ü. NURGES

ON THE REALIZATION OF LINEAR SYSTEMS FROM ESTIMATES OF MARKOV-PARAMETER MATRICES

The realization problem of a linear dynamic system, represented by the finite number of Markov parameters, is considered. It is shown that the resulting partial realization of the system has the canonical form (6) with probability 1, provided the condition (4) is satisfied. A recursive algorithm for solving the modified partial realization problem is presented.