EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.2.11

УДК 518:517.392

М. ЛЕВИН

О НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ И ФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

M. LEVIN. PARIMAD KVADRATUURVALEMID KAALUFUNKTSIOONIGA JA FIKSEERITUD SÕLMEDEGA

M. LEVIN. ON THE BEST QUADRATURE FORMULAE WITH THE WEIGHT FUNCTION AND THE FIXED NOTES

Пусть $W^{(r)}L_\infty$ обозначает множество всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0;1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и удовлетворяют условию: $\operatorname*{supvrai}_{0\leqslant x\leqslant 1}|f^{(r)}(x)|\leqslant M$. Здесь M — заданное число.

Через $W_0^{(r)}L_\infty$ обозначается множество всех функций $f(x)$, которые принадлежат множеству $W^{(r)}L_\infty$ и удовлетворяют условию: $f(0)=$ $=f'(0)=\ldots=f^{(r-1)}(0)=0$.

Пусть функция $p(x)$ суммируема и положительна на отрезке $[0;1]$. Рассмотрим квадратурные формулы вида:

$$\int_0^1 p(x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{r-1}A_{kj}f^{(j)}(x_k)+R_n(f), \tag{1}$$

$$\int_0^1 p(x)f(x)\,dx=\sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^{r-1}B_{kj}f^{(j)}(x_k)+E_n(f), \tag{2}$$

где узлы $0=x_0<x_1<\ldots<x_n\leqslant 1$ фиксированы.

На множествах $W_0^{(r)}L_\infty$ и $W^{(r)}L_\infty$ найдем соответственно наилучшие [1] формулы (1) и (2), т. е. те формулы, для которых величины

$$R_n=\sup_{f\in W_0^{(r)}L_\infty}|R_n(f)|,\quad E_n=\sup_{f\in W^{(r)}L_\infty}|E_n(f)|$$

имеют наименьшие значения. Для этого воспользуемся теоремой Бернштейна [2] (см. также [3], с. 330—332) о многочленах наименьшего уклонения от заданной функции в метрике L, методом Никольского [1] для нахождения весов наилучшей формулы и теоремой о связи наилучших формул (1) и (2).

Легко увидеть [1]

$$R_n=M\cdot c_n, \tag{3}$$

где

$$c_n=\int_0^1|K(t)|\,dt,$$

$$K(t)=\varphi_p(t)-\sum_{k=1}^n\sum_{j=0}^{r-1}\frac{A_{kj}}{(r-1-j)!}(x_k-t)^{r-1-j}E(x_k-t),$$

$$\varphi_p(t)=\frac{1}{(r-1)!}\int_t^1 p(x)\,(x-t)^{r-1}dx,$$

$$E(u)=\begin{cases}1, & u>0;\\ 0, & u\leqslant 0.\end{cases}$$

Введем обозначения:

$$x_{n+1}=1,\quad a_i=0{,}5\cdot(x_{i+1}+x_i),\quad h_i=0{,}5(x_{i+1}-x_i)\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

$$\omega(u)=\prod_{l=0}^{r-1}\left(u-\cos\frac{l+1}{r+1}\pi\right),$$

$$Q_i(u)=\sum_{l=0}^{r-1}\frac{\omega(u)}{\left(u-\cos\frac{l+1}{r+1}\pi\right)\omega'\left(\cos\frac{l+1}{r+1}\pi\right)}\varphi_p\left(h_i\cos\frac{l+1}{r+1}\pi+a_i\right)$$

$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$,

$Q_n(u)\equiv 0$,

$$\pi_i(t)=\sum_{k=i+1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1}\frac{A_{kj}}{(r-1-j)!}(x_k-t)^{r-1-j}\tag{4}$$

$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$,

$\pi_n(t)\equiv 0$.

Согласно теореме Бернштейна [2, 3], при $i<n$ наименьшее значение интегралу

$$\int_{-1}^{1}|\varphi_p(h_iu+a_i)-q(u)|\,du,$$

где $q(u)$ — произвольный многочлен степени $r-1$, доставляет единственный многочлен $Q_i(u)$.

Поэтому

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\varphi_p(t)-\pi_i(t)\right|dt=\sum_{i=0}^{n}h_i\int_{-1}^{1}\left|\varphi_p(h_iu+a_i)-\pi_i(h_iu+a_i)\right|du\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=0}^{n}h_i\int_{-1}^{1}\left|\varphi_p(h_iu+a_i)-Q_i(u)\right|du=\sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\varphi_p(t)-Q_i\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right)\right|dt.\tag{5}$$

Отсюда видно, что веса A_{kj}, минимизирующие величину c_n (а значит и R_n), будут найдены, если удастся их выбрать так, чтобы выполнялись тождества

$$\pi_i(t)\equiv Q_i\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right)\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).\tag{6}$$

Так как $\pi_n(t)\equiv Q_n(t)\equiv 0$, то тождества (6) выполняются, если справедливы тождества

$$Q_{i-1}\left(\frac{t-a_{i-1}}{h_{i-1}}\right)-Q_i\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right)\equiv\pi_{i-1}(t)-\pi_i(t)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

или (по (4))

$$Q_{i-1}\left(\frac{t-a_{i-1}}{h_{i-1}}\right)-Q_i\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right)\equiv\sum_{j=0}^{r-1}\frac{A_{ij}}{(r-1-j)!}(x_i-t)^{r-1-j}\tag{7}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Раскладывая левые части (7) по степеням $(t-x_i)$ с помощью формулы Тейлора, убеждаемся, что тождества (7) выполняются при значениях

$$A_{ij}=(-1)^{r-1-j}\left[\frac{1}{h_{i-1}^{r-1-j}}Q_{i-1}^{(r-1-j)}(1)-\frac{1}{h_i^{r-1-j}}Q_i^{(r-1-j)}(-1)\right] \qquad (8)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Единственная наилучшая на множестве* $W_0^{(r)}L_\infty$ *формула* (1) *имеет веса* (8).

Замечание. Найдем простую для применения оценку ошибки наилучшей формулы (1).

Пусть на $[0;1]$ выполнено неравенство $p(x)\leqslant\lambda$. Так как Q_i есть интерполяционный многочлен для φ_p, то при $i<n$ имеем

$$|\varphi_p(h_iu+a_i)-Q_i(u)|=\left|\frac{\overset{(r)}{\varphi_p}(\xi_i)h_i^r}{r!}\omega(u)\right|\leqslant\frac{\lambda h_i^r}{r!}|\omega(u)|.$$

Кроме того,

$$h_n\int\limits_{-1}^{1}|\varphi_p(h_nu+a_n)|\,du=\int\limits_{x_n}^{1}\int\limits_{t}^{1}p(t)\frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dx\,dt\leqslant\frac{\lambda(1-x_n)^{r+1}}{(r+1)!},$$

$$\int\limits_{-1}^{1}|\omega(u)|\,du=\frac{1}{2^{r-1}}.$$

Учитывая все это, по (3) и (5) (последнее для наилучшей формулы превращается в равенство) получаем

$$R_n\leqslant\frac{M\lambda}{r!}h^{r+1}\cdot\nu_n,$$

где $h=\max(h_0,\ h_1,\ \ldots,\ h_{n-1},\ 1-x_n)$, $\nu_n=\dfrac{n}{2^{r-1}}+\dfrac{1}{r+1}$.

Из теоремы 1 и результата [4] следует

Теорема 2. *Единственная наилучшая на множестве* $W^{(r)}L_\infty$ *формула* (2) *имеет веса* $B_{kj}=A_{kj}$ $(k=1,2,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,r-1)$, *где* A_{kj} *определены в* (8), *и веса*

$$B_{0j}=\frac{1}{j!}R_n(x^j)\quad(j=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

где $R_n(f(x))$ *означает ошибку формулы* (1) *с весами* (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Бернштейн С. Н., ДАН СССР, 117, 405 (1927).
3. Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. 1, 1952.
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 449 (1972).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 18/XII 1973