EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.2.10

УДК 518:517.392

*М. ЛЕВИН*

# ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОЦЕНКЕ ОШИБКИ ФОРМУЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

*M. LEVIN.* MÄRGE INTEGREERIMISVALEMI VEA HINNANGU KOHTA

*M. LEVIN.* A NOTE ON THE ASSESSMENT OF THE ERROR IN INTEGRATION FORMULAS

В настоящем сообщении рассматривается следующий вопрос. Пусть на некотором множестве $V$ функций $f(x)$ имеется оценка ошибки определенной квадратурной формулы. Пусть, далее, по этой формуле интегрируем конкретные функции, о свойствах которых известно больше, чем о свойствах, определяющих множество $V$. Требуется для этих конкретных функций получить оценку ошибки интегрирования, простую для применения и учитывающую дополнительную информацию об интегрируемых функциях. *

Воспользуемся следующими обозначениями:
$g(x, t)$ — функция Грина для задачи

$$\begin{aligned} &y^{(r)}=\varphi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1),\\ &L_i y=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r); \end{aligned} \tag{1}$$

$G(x, t)$ — функция Грина для задачи

$$\begin{aligned} &y^{(r+s)}=\varphi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1),\\ &L_i y=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),\\ &Q_j y=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s), \end{aligned} \tag{2}$$

где (1) и (2) — некоторые линейные краевые условия.

Через $\underset{(g)}{W^{(r)}} L_p$ обозначим множество функций $f(x)$, которые удовлетворяют краевым условиям (1), имеют на отрезке $[0; 1]$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и для которых

$$\|f^{(r)}\|_{L_p}=[\int_0^1 |f^{(r)}(x)|^p\,dx]^{1/p}\leqslant M_r,$$

где $r$, $M_r$, $p$ — заданные числа, причем $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Пример такого класса $(\underset{0}{W^{(r)}} L_p)$ рассматривался, например, в [2–5]. Для него $L_i f = f^{(i-1)}(0)$.

Пусть имеется некоторая конкретная формула вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\rho_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k)+R_n(f), \tag{3}$$

построенная для функций множества $\underset{(g)}{W^{(r)}} L_p$.

* Подобный вопрос рассматривался в [1].

Такой формулой может быть, например, наилучшая формула [2], т. е. та формула среди формул (3), для которой величина

$$\sup_{f\in W_{(g)}^{(r)}L_p} |R_n(f)|$$

имеет наименьшее значение. Говоря далее о формуле (3), будем иметь в виду именно эту формулу.

Известно [2, 6, 7], что оценка ошибки формулы (3) может быть записана в виде

$$|R_n(f)|\leqslant M_r\delta, \tag{4}$$

где

$$\delta=[\int_0^1 |R_n(g(x,t))|^q\,dt]^{\frac{1}{q}} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right). \tag{5}$$

Пусть теперь по формуле (3) интегрируем конкретную функцию $F(x)\in W_{(g)}^{(r)}L_p$, о которой дополнительно известно следующее: 1° на отрезке [0; 1] функция $F^{(r+s-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, 2° $Q_jF=0$ ($j=1,2,\ldots,s$), 3° $\|F^{(r+s)}\|_{L_p}\leqslant M_{r+s}$.

Найдем для ошибки $R_n(F)$ оценку в виде

$$|R_n(F)|\leqslant M_{r+s}\delta\gamma_s, \tag{6}$$

где $\delta$ определено в (5). Таким образом, нас интересует множитель $\gamma_s$.

Так как $L_iF=Q_jF=0$ ($i=1,2,\ldots,r$; $j=1,2,\ldots,s$), то имеет место представление

$$F(x)=\int_0^1 F^{(r+s)}(u)\,G(x,u)\,du. \tag{7}$$

Согласно определению, функция $G(x,u)$ по переменной $x$ удовлетворяет условиям (1), поэтому

$$G(x,u)=\int_0^1 G_{x^r}^{(r)}(t,u)\,g(x,t)\,dt. \tag{8}$$

По (7) и (8) функция $F(x)$ представима в виде

$$F(x)=\int_0^1 F^{(r+s)}(u)\int_0^1 G_{x^r}^{(r)}(t,u)\,g(x,t)\,dt\,du,$$

откуда известными рассуждениями [2, 6] получаем

$$R_n(F)=\int_0^1 F^{(r+s)}(u)\int_0^1 G_{x^r}^{(r)}(t,u)\,R_n(g(x,t))\,dt\,du.$$

Применяя неравенство Гёльдера, находим

$$|R_n(F)|\leqslant M_{r+s}\{\int_0^1 |\int_0^1 G_{x^r}^{(r)}(t,u)\,R_n(g(x,t))\,dt|^q\,du\}^{1/q}. \tag{9}$$

Так как по неравенству Гёльдера и (5)

$$|\int_0^1 G_{x^r}^{(r)}(t,u)\,R_n(g(x,t))\,dt|\leqslant\{\int_0^1 |G_{x^r}^{(r)}(t,u)|^p\,dt\}^{1/p}\delta,$$

то этим из (9) следует оценка

$$|R_n(F)|\leqslant M_{r+s}\delta\{\int_0^1 [\int_0^1 |G_{x^r}^{(r)}(t,u)|^p\,dt]^{q/p}\,du\}^{1/q}.$$

Таким образом, имеем следующий результат.

Теорема. *Пусть* (4) — *оценка ошибки формулы* (3) *для функций множества* $W^{(r)}_{(g)}L_p$. *Оценка ошибки этой же формулы для функции* $F(x)\in W^{(r)}_{(g)}L_p$, *удовлетворяющей дополнительным условиям* 1°—3°, *может быть записана в виде* (6), *где*

$$\gamma_s=\{\int\limits_0^1[\int\limits_0^1|G^{(r)}_{x^r}(t,u)|^p\,dt]^{q/p}du\}^{1/q}. \tag{10}$$

Пример. Рассмотрим множество $W^{(r)}_{(g)}L_p=W^{(r)}_0L_2$. Для наилучшей на этом множестве формулы (3) при $\varrho_k=r-2$ вычислено значение $\delta$ (см., напр., [3, 4]). Пусть функция $F(x)\in W^{(r)}_0L_2$ и удовлетворяет дополнительным условиям 1°—3° при $Q_jF=F^{(r+j-1)}(0)$. Тогда для функции $F(x)$ выполнено представление (7), где

$$G(x,u)=\frac{(x-u)^{r+s-1}}{(r+s-1)!}E(x-u),$$

$$E(x-u)=\begin{cases}0, & x\leqslant u,\\ 1, & x>u,\end{cases}$$

и поэтому по (10) (где $p=q=2$) получаем

$$\gamma_s=\frac{1}{(s-1)!\sqrt{2s(2s-1)}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 222 (1971).
2. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
3. Доронин Г. Я., Сб. научн. тр. Днепропетр. инж.-стр. ин-та, № 1—2, 210 (1955).
4. Аксень М. Б., Турецкий А. Х., ДАН СССР, **166**, № 5, 1019 (1966).
5. Корнейчук Н. П., Лушпай Н. Е., Изв. АН СССР, Сер. матем., **33**, 1416 (1969).
6. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, М., 1967.
7. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 407 (1970).

*Таллинский политехнический институт*

Поступила в редакцию
9/X 1973