EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.2.07

УДК 65.012.122

Лариса АРЕТ

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ МНОГОИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

Метод декомпозиции Данцига—Вульфа (Д—В) при решении задач транспортировки неоднородного продукта как в матричной, так и в сетевой постановке применялся в [1–4]. Ограничения на количество транспортных средств в этих работах не рассматривались. В данном сообщении предлагается использовать метод декомпозиции Д—В для решения следующей задачи о перевозке неоднородного продукта ограниченными транспортными средствами нескольких видов:

$$\max \sum_{i,j,k,s=1}^{m,n,q,t} \theta_{ijk} x_{ijks} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j,k=1}^{n,q} \theta_{ijk} x_{ijks} \leqslant a_{is}, \quad (\text{для всех } i, s), \tag{2}$$

$$\sum_{i,k=1}^{m,q} \theta_{ijk} x_{ijks} \geqslant b_{js}, \quad (\text{для всех } j, s), \tag{3}$$

$$\sum_{s=1}^{t} x_{ijks} \leqslant c_{ijk}, \quad (\text{для всех } i, j, k), \tag{4}$$

$$\sum_{i,j,s=1}^{m,n,t} x_{ijks} \leqslant d_k, \quad (\text{для всех } k), \tag{5}$$

$$x_{ijks} \geqslant 0, \quad (\text{для всех } i, j, k, s), \tag{6}$$

где для всех i, j, k, s $a_{is}>0$, $b_{js}>0$, $c_{ijk}\geqslant 0$, $d_k>0$,

$$\sum_{i,s=1}^{m,t} a_{is} \geqslant \sum_{j,s=1}^{n,t} b_{js}; \quad \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{ijk} \geqslant d_k, \quad q \geqslant t. \tag{7}$$

Здесь x_{ijks} — количество единиц транспорта k-го вида, назначаемое для перевозки s-го продукта от i-го поставщика j-му потребителю; θ_{ijk} — количество продукта, перевозимое единицей транспорта k-го вида за время T от i-го поставщика j-му потребителю; (2) — ограничения на количество рассматриваемых видов продуктов в каждом пункте-поставщике; (3) — ограничение снизу на количество s-го продукта, которое должно быть доставлено в j-й пункт-потребитель; (4) и (5) — ограничения соответственно на пропускные способности транспортных коммуникаций и на количество имеющегося транспорта k-го вида. Задача (1)—(6) возникает при планировании срочных перевозок.

Метод декомпозиции Д—В заменяет исходную задачу некоторой, эквивалентной ей Z-задачей* с меньшим числом ограничений, но с бо́льшим количеством переменных. Z-задача может решаться симплекс-методом. На каждой итерации процесса решения Z-задачи для проверки оптимальности текущего базисного решения и генерации вектора, подлежащего введению в базис, если критерий оптимальности не выполняется, необходимо найти оптимальные решения $X_{\lambda}^{(k)}$-задач $(k = 1, 2, \ldots, q)$.

Для рассматриваемой задачи (1)—(6) при разбиении матрицы ограничений (2)—(6) на блоки по k $(k = 1, 2, \ldots, q)$, когда (2)—(3) выступают в роли связующих ограничений, а матрица, определяемая условиями (4)—(6), распадается на q не связанных между собой подматриц, Z-задача и $X_{\lambda}^{(k)}$- задачи принимают следующий вид:

Z-задача.

$$\max \sum_{k=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{N_k} \sigma_{\nu}^{(k)} z_{\nu}^{(k)} \tag{8}$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{N_k} p_{\nu k}^{(is)} z_{\nu}^{(k)} \leqslant a_{is}, \quad (\text{для всех } i, s), \tag{9}$$

$$\sum_{k=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{N_k} p_{\nu k}^{(js)} z_{\nu}^{(k)} \geqslant b_{js}, \quad (\text{для всех } j, s), \tag{10}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N_k} z_{\nu}^{(k)} = 1, \tag{11}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, N_k),$$

$$z_{\nu}^{(k)} \geqslant 0, \tag{12}$$

где

$$\sigma_{\nu}^{(k)} = \sum_{i,j,s=1}^{m,n,t} \theta_{ijk} x_{ijks}^{(\nu)},$$

$$p_{\nu k}^{(is)} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ijk} x_{ijks}^{(\nu)},$$

$$p_{\nu k}^{(js)} = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ijk} x_{ijks}^{(\nu)},$$

$$x_{ijks} = \sum_{\nu=1}^{N_k} x_{ijks}^{(\nu)} z_{\nu}^{(k)},$$

N_k — число вершин k-го многогранника, определяемого условиями (4)—(6).

$X_{\lambda}^{(k)}$-задача (для всех k).

$$\max \sum_{l,s=1}^{L,t} \tilde{\theta}_{lks}^{\lambda} \tilde{x}_{lks} \tag{13}$$

при ограничениях

---

* Используемые обозначения соответствуют принятым в [2].

$$\sum_{s=1}^{t} \tilde{x}_{lks} + y_{lk} = \tilde{c}_{lk}, \quad (\text{для всех } l), \tag{14}$$

$$\sum_{l,s=1}^{L,t} \tilde{x}_{lks} + y_k = d_k, \tag{15}$$

$$\tilde{x}_{lks},\ y_{lk},\ y_k \geqslant 0, \quad (\text{для всех } l, k, s), \tag{16}$$

$$\sum_{l=1}^{L} \tilde{c}_{lk} \geqslant d_k.$$

Здесь y_{lk}, y_k — дополнительные переменные; $l = j + n(i-1)$ и пробегает значения $l = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, mn = L$, когда j изменяется от 1 до n, а i от 1 до m. В связи с переходом от индексов i, j к индексу l $x_{ijks} = \tilde{x}_{lks}$, $c_{ijk} = \tilde{c}_{lk}$ и $\overset{\lambda}{\theta}_{ijks} = (1 - \lambda_{is} - \mu_{js})\theta_{ijk}$ заменяются на $\tilde{\theta}^{\lambda}_{lks}$.

Величины λ_{is}, μ_{js} в соотношении, определяющем $\overset{\lambda}{\theta}_{ijks}$, а также ω_k (для всех i, j, k, s) являются двойственными оценками условий (9)—(11) относительно текущего базиса и удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{i,s=1}^{m,t} \lambda_{is} p^{(is)}_{\nu_h k} + \sum_{j,s=1}^{n,t} \mu_{js} p^{(js)}_{\nu_h k} + \omega_k = \sigma^{(k)}_{\nu_h},$$

где $\nu_h (h = 1, 2, \ldots, ((m+n)t + q))$ — номера базисных векторов Z-задачи.

Покажем теперь, что при указанном выше разбиении матрицы ограничений (2)—(6) на блоки проверка критерия оптимальности Z-задачи существенно упрощается вследствие того, что оптимальные решения $X^{(k)}_{\lambda}$-задач могут быть получены непосредственным просмотром коэффициентов целевых функций $X^{(k)}_{\lambda}$-задач.

Система ограничений каждой $X^{(k)}_{\lambda}$-задачи $(k = 1, 2, \ldots, q)$ состоит из $(L+1)$ уравнений, ранг матрицы равен $(L+1)$, и она имеет вид:

$\tilde{x}_{1k1}\tilde{x}_{2k1}\ldots\tilde{x}_{lk1}\ldots\tilde{x}_{Lk1}$	$\tilde{x}_{1k2}\tilde{x}_{2k2}\ldots\tilde{x}_{lk2}\ldots\tilde{x}_{Lk2}$	$\ldots$	$\tilde{x}_{1kt}\tilde{x}_{2kt}\ldots\tilde{x}_{lkt}\ldots\tilde{x}_{Lkt}$	$y_{1k}y_{2k}\ldots y_{lk}\ldots y_{Lk}y_k$
1	1	$\ldots$	1	1
1	1		1	1
$\ddots$ 1	$\ddots$ 1		$\ddots$ 1	$\ddots$ 1
$\ddots$ 1	$\ddots$ 1		$\ddots$ 1	$\ddots$ 1
1 1 . . . 1 . . . 1	1 1 . . . 1 . . . 1	$\ldots$	1 1 . . . 1 . . . 1	1

В этой матрице только $(2L+1)$ различных столбцов, поэтому l-й столбец оптимального базиса соответствует или $\tilde{x}_{lks}$ или y_{lk}.

Обозначим через I^B_k $(k = 1, 2, \ldots, q)$ множество пар индексов (l, s) переменных $\tilde{x}_{lks}$, которые входят в оптимальный базис. Тогда

$$(l_1, s_1) \in I^B_k, \quad \text{если} \quad \tilde{\theta}^{\lambda}_{l_1 k s_1} = \max_{l,s} \tilde{\theta}^{\lambda}_{lks},$$

$$(l_2, s_2) \in I^B_k, \quad \text{если} \quad \tilde{\theta}^{\lambda}_{l_2 k s_2} = \max_{\substack{l,s \\ l \neq l_1}} \tilde{\theta}^{\lambda}_{lks},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(l_u, s_u) \in I_k^B, \text{ если } \tilde{\theta}^{\lambda}_{l_u k s_u} = \max_{\substack{l,s \\ (l,s) \notin I_k^B}} \tilde{\theta}^{\lambda}_{lks},$$

и т. д. до тех пор, пока выполняется неравенство

$$\sum_{\{l/(l,s) \in I_k^B\}} \tilde{c}_{lk} < d_k, \tag{17}$$

иначе говоря, в оптимальный базис войдут те $\tilde{x}_{lks}$, которые имеют максимальные коэффициенты функции цели $\tilde{\theta}^{\lambda}_{lks}$, и этих $\tilde{x}_{lks}$ войдет в базис столько, что положив каждое базисное $\tilde{x}_{lks} = \tilde{c}_{lk}$ (пропускной способности l-ой коммуникации), не нарушим ограничения на количество транспорта.

Пусть (l_r, s_r) — пара индексов, при которых впервые нарушается (17), тогда $(l_r, s_r) \in I_k^B$, а $\tilde{x}_{l_r k s_r}$ и $y_{l_r k}$ войдут в оптимальный базис. Это имеет место только один раз для каждого k $(k = 1, 2, \ldots, q)$. Расположим $\tilde{x}_{l_r k s_r}$ и $y_{l_r k}$ так, чтобы l_r-й столбец базиса соответствовал $\tilde{x}_{l_r k s_r}$, а $(L+1)$-й — $y_{l_r k}$. Тогда матрицу, соответствующую оптимальному базису и ей обратную, можно представить в виде:

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & 1 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 0 \\ \delta_{1ks} & \ldots & \delta_{l_r k s_r} & \ldots & \delta_{Lks} & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ -\delta_{1ks} & -\delta_{2ks} & \ldots & 0 & \ldots & -\delta_{Lks} & 1 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & 0 \\ \delta_{1ks} & \delta_{2ks} & \ldots & \delta_{l_r k s_r} & \ldots & \delta_{Lks} & -1 \end{pmatrix},$$

где $\delta_{lks} = \begin{cases} 1, \text{ если } (l,s) \in I_k^B, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Оптимальные решения $X_{\lambda}^{(k)}$-задач $(k = 1, 2, \ldots, q)$ определяются теперь по формуле:

$$\overset{*}{\chi}_{lks} = \begin{cases} \tilde{c}_{lk} \text{ для } l = 1, 2, \ldots, l_r - 1, l_r + 1, \ldots, L, \\ d_k - \sum\limits_{f=1}^{L} \tilde{c}_{fk}\delta_{fks} + \tilde{c}_{l_r k}\delta_{l_r k s_r} \text{ для } l = l_r, \\ \sum\limits_{f=1}^{L} \tilde{c}_{fk}\delta_{fks} - d_k \text{ для } l = L+1, \end{cases} \tag{18}$$

откуда значения $\overset{*}{\tilde{x}}_{lks}$ выделяются следующим образом:

$$\overset{*}{\tilde{x}}_{lks} = \overset{*}{\chi}_{lks}, \text{ если соответствующие } \delta_{lks} = 1.$$

Оптимальное значение функционала $X_\lambda^{(k)}$-задачи

$$\overset{*}{I}{}_\lambda^{(k)} = \sum_{(l,s)\in I_k^B} \tilde{\theta}_{lks}^{\lambda} \overset{*}{\tilde{x}}_{lks}.$$

Для каждой $X_\lambda^{(k)}$-задачи вычисляется величина

$$\Delta_{v^*}^{(k)} = \omega_k - \overset{*}{I}{}_\lambda^{(k)},$$

и проверка исследуемого опорного плана Z-задачи на оптимальность производится по правилам метода разложения Д—В.

Таким образом, рассматриваемое разбиение матрицы ограничений задачи (1)—(6) на блоки дает простую структуру ограничений $X_\lambda^{(k)}$-задач, позволяющую быстро (по формуле (18)) получать их решения, что сокращает время проверки критерия оптимальности Z-задачи на каждой итерации, а, следовательно, и время решения исходной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калика В. И., Математические аспекты постановки и решения одной задачи оптимизации перевозок, В сб.: Математические методы в экономических исследованиях, Уфа, 1971, с. 77.
2. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Новые направления в линейном программировании, М., 1966, с. 329.
3. Jarvis J. J., On the equivalence between the node-arc and arc-chain formulations for the multicommodity maximal flow problem, Nav. Res. Log. Quart., **16**, No. 4, 525 (1969).
4. Grigoriadis M. D., Walker W. F., A treatment of transportation problems by primal partition programming, Management Science, **14**, No. 9, 565 (1968).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9/VII 1973

Larissa ARET

ÜHE MITMEINDEKSILISE TRANSPORDIÜLESANDE LAHENDAMISEST

Käsitletakse ülesannet leida maksimaalne toodete kogus, mida saab etteantud aja jooksul ära vedada, võttes arvesse lineaarkitsendusi iga toote kogusele nii lähte- kui ka sihtpunktis, teede läbilaskevõimele ja transpordivahendite arvule. Tuletatakse Dantzigi-Wolfe'i meetodi erikuju, milles optimaalsuskriteeriumi kontroll on lihtsam ja lahendusaeg lühem. Selleks lahutatakse kitsenduste maatriks blokkideks nii, et lähte- ja sihtpunktides tootekogustele esitatavad kitsendused jäävad siduvateks kitsendusteks.

Larissa ARET

ON THE SOLUTION OF A MULTI-INDEX TRANSPORTATION PROBLEM

A linear programming problem of maximizing the quantity of transported goods with available time is discussed. An implementation of Dantzig-Wolfe decomposition method is shown. The optimality criterion is simplified by means of taking the supply and demand constraints as the master problem, and the constraints on stream capacities and on numbers of vehicles as subproblems.