EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.2.04

УДК 519.281

В. ОЛЬМАН

МИНИМАКСНОЕ ЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ НЕКВАДРАТИЧНОЙ ПОТЕРЕ

Рассмотрим задачу оценивания m-мерного вектора в схеме

$$EY=\theta \tag{1}$$

по наблюденным независимым реализациям $y_1, y_2, \ldots, y_n$ случайного m-мерного вектора Y. Будем считать, что распределение вектора Y обладает плотностью $f(Y-\theta)$ относительно лебеговской m-мерной меры, причем вид этой плотности неизвестен.

Определение 1. Классом $\mathfrak{L}$ назовем класс неубывающих неотрицательных функций, определенных на положительной полуоси.

Пусть качество оценивания вектора θ с помощью вектор-статистики $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ измеряется величиной

$$\sup_{\theta\in R^m} EL((g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)-\theta)^T(g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)-\theta)), \tag{2}$$

где $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ — независимые векторы с плотностью $f(Y-\theta)$, R^m — m-мерное евклидово пространство, а $L(s)\in\mathfrak{L}$. Ограничимся рассмотрением только линейных по наблюдениям оценок

$$g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)=\sum_{i=1}^n T_iY_i+u, \tag{3}$$

где $T_1, T_2, \ldots, T_n$ — произвольные постоянные матрицы порядка $m\times n$, а u — произвольный постоянный m-мерный вектор. Подставляя (3) в (2), получаем критерий (2) в виде

$$\sup_{\theta\in R^m} EL((\sum_{i=1}^n T_iY_i+u-\theta)^T(\sum_{i=1}^n T_iY_i+u-\theta)). \tag{4}$$

Как известно [1], при $L(s)=s$ выборочное среднее минимизирует $E(g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)-\theta)^T(g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)-\theta)$ для каждого вектора θ в классе линейных несмещенных оценок, а кроме того, как указано Г. А. Барнардом [2], минимизирует критерий (4). В настоящей статье показывается, что при не очень жестких ограничениях на плотность f критерий (4) минимизируется по вектору u с $u=0$ для всех $L(s)\in\mathfrak{L}$, а при выпуклых функциях $L(s)\in\mathfrak{L}$ минимум критерия (4) реализуется на выборочном среднем. Выводится достаточное условие для оптимальности выборочного среднего по критерию (4) при любой функции $L(s)\in\mathfrak{L}$.

Так как вектор θ может принимать произвольные значения, то нетрудно убедиться, что для матриц $T_1^0, T_2^0, \ldots, T_n^0$, минимизирующих (4), необходимо, чтобы $\sum_{i=1}^{n} T_i^0 = I_m$ (I_m — единичная матрица порядка m), и таким образом, поиск оптимальной оценки по критерию (4) сводится к минимизации по вектору u и матрицам $T_1, T_2, \ldots, T_n$ интеграла

$$\int_{R^{mn}} L\Big(\big(\sum_{i=1}^{n} T_i y_i + u\big)^T \big(\sum_{i=1}^{n} T_i y_i + u\big)\Big) \prod_{i=1}^{n} f(y_i)\, dy_i \tag{5}$$

при ограничении $\sum_{i=1}^{n} T_i = I_m$.

Определение 2. Будем говорить, что функция φ, определенная на R^m, принадлежит классу F_m, если φ обладает следующими свойствами:

а) $\varphi(x) \geqslant \varphi(cx), \quad \forall x \in R^m, \quad c > 1;$
б) $\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \forall x \in R^m.$

Для определения оптимального вектора u докажем следующий факт.

Лемма 1. *Пусть* $L(s) \in \mathfrak{L}$, *а* $\varphi(s) \in F_1$ *и пусть* $\forall u\ G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-u) L(x^2)\, dx < \infty$. *Тогда* $G(u)$ *есть четная неубывающая при* $u \geqslant 0$ *функция.*

Доказательство. Четность функции $G(u)$ очевидна. Пусть $s > 0$, $u > 0$. Докажем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-u) L(x^2)\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-u-s) L(x^2)\, dx. \tag{6}$$

Покажем, что

$$\int_{u}^{u+s} \varphi(x-u) L(x^2)\, dx \leqslant \int_{u}^{u+s} \varphi(x-u-s) L(x^2)\, dx. \tag{7}$$

Так как

$$\int_{u}^{u+s} \varphi(x-u) L(x^2)\, dx = \int_{u}^{u+s/2} \varphi(x-u) L(x^2)\, dx + \int_{u}^{u+s/2} \varphi(x-u-s) L((x-2u-s)^2)\, dx,$$

а

$$\int_{u}^{u+s} \varphi(x-u-s) L(x^2)\, dx = \int_{u}^{u+s/2} \varphi(x-u-s) L(x^2)\, dx + \int_{u}^{u+s/2} \varphi(x-u) L((x-2u-s)^2)\, dx,$$

то неравенство (7) очевидно в силу того, что при $u \leqslant x \leqslant u + s/2$ $\varphi(x-u) \geqslant \varphi(x-u-s)$ и $L(x^2) \leqslant L((x-2u-s)^2)$, следовательно,

$$\varphi(x-u) L(x^2) + \varphi(x-u-s) L((x-2u-s)^2) \leqslant \leqslant \varphi(x-u-s) L(x^2) + \varphi(x-u) L((x-2u-s)^2).$$

Аналогичным образом доказываем

$$\int_{-\infty}^{u} \varphi(x-u) L(x^2)\, dx + \int_{u+s}^{\infty} \varphi(x-u) L(x^2)\, dx \leqslant \leqslant \int_{-\infty}^{u} \varphi(x-u-s) L(x^2)\, dx + \int_{u+s}^{\infty} \varphi(x-u-s) L(x^2)\, dx. \tag{8}$$

Суммируя неравенства (7) и (8), получаем требуемое неравенство (6). Из леммы следует

Теорема 1. *Если плотность $f \in F_m$, то критерий (4) минимизируется по вектору* $\mathbf{u}$ *при* $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ *для любой функции* $L(s) \in \mathfrak{L}$.

Доказательство. Обозначим плотность распределения вектора $\mathbf{Z}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i\mathbf{Y}_i-\theta$ через $f_1(\mathbf{z})$ и, очевидно, $f_1 \in F_m$. Преобразуем (5) к виду

$$\int_{R^m} L((\mathbf{z}+\mathbf{u})^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}+\mathbf{u}))f_1(\mathbf{z})\,d\mathbf{z}. \tag{9}$$

Используя лемму 1, нетрудно показать, что результат интегрирования произведения $L((\mathbf{z}+\mathbf{u})^{\mathrm{T}}(\mathbf{z}+\mathbf{u}))f_1(\mathbf{z})$ по любой прямой, проходящей через начало координат, может быть уменьшен заменой $\mathbf{u}$ нулевым вектором, что и доказывает теорему.

Для более узкого класса функций потери верна

Теорема 2. *Пусть $f \in F_m$. Тогда при любой выпуклой функции $L(s) \in \mathfrak{L}$ минимум критерия (4) реализуется на $\mathbf{T}_i=1/n\mathbf{I}_m\ \forall i$, т. е. на выборочном среднем.*

Доказательство. Согласно теореме 1 оптимизация критерия (5) сводится к максимизации по матрицам $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_n$ интеграла

$$\int_{R^{mn}} L\Big(\big(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i\mathbf{y}_i\big)^{\mathrm{T}}\big(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i\mathbf{y}_i\big)\Big)\prod_{i=1}^{n} f(\mathbf{y}_i)\,d\mathbf{y}_i \tag{10}$$

при ограничении $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i=\mathbf{I}_m$. Назовем минимаксным решением блочную матрицу

$$\mathbf{V}_1^0=(\mathbf{T}_1^0 \,\vdots\, \mathbf{T}_2^0 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{T}_n^0),$$

где матрицы $\mathbf{T}_1^0, \mathbf{T}_2^0, \ldots, \mathbf{T}_n^0$ минимизируют (10). Через $\mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_3^0, \ldots, \mathbf{V}_{n!}^0$ обозначим матрицы, которые получаются из $\mathbf{V}_1^0$ путем всевозможных перестановок в ней матриц $\mathbf{T}_i^0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ распределены одинаково, следовательно, $\mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_3^0, \ldots, \mathbf{V}_{n!}^0$ — также минимаксные решения. А так как $(\mathbf{V}_i^0-\mathbf{V}_j^0)^{\mathrm{T}}(\mathbf{V}_i^0-\mathbf{V}_j^0)\geqslant 0$ $\forall i, j$, то $(\mathbf{V}_i^0+\mathbf{V}_j^0)^{\mathrm{T}}(\mathbf{V}_i^0+\mathbf{V}_j^0)/2 \leqslant \mathbf{V}_i^{0\mathrm{T}}\mathbf{V}_i^0+\mathbf{V}_j^{0\mathrm{T}}\mathbf{V}_j^0$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, и следовательно, в силу выпуклости

$$L\left(\frac{\mathbf{z}^{\mathrm{T}}(\mathbf{V}_i^0+\mathbf{V}_j^0)^{\mathrm{T}}(\mathbf{V}_i^0+\mathbf{V}_j^0)\mathbf{z}}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2}L(\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_i^{0\mathrm{T}}\mathbf{V}_i^0\mathbf{z})+\frac{1}{2}L(\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_j^{0\mathrm{T}}\mathbf{V}_j^0\mathbf{z}), \tag{11}$$

где $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}=(\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathbf{y}_n^{\mathrm{T}})$. Благодаря (11) матрицы $\mathbf{T}_{i0}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{T}_j^0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, минимизируют (10). Так как $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{T}_i^0=\mathbf{I}_m$, то $\mathbf{T}_{i0}=\frac{1}{n}\mathbf{I}_m$. Теорема 2 доказана.

Свойство оптимальности выборочного среднего при выпуклых функциях потери из класса $\mathfrak{L}$ не распространяется на все элементы этого класса. В качестве примера рассмотрим линейное несмещенное оценивание параметра сдвига плотности

$$\varphi_\theta(x)=\gamma(\exp(-|x-\theta|)+\exp(-h|x-\theta|)), \quad \gamma=h/2(h+1), \quad h>1.$$

Очевидно, $\varphi_\theta(x) \in F_1$ при $\theta = 0$. Нетрудно показать, что плотность распределения в точке 0 линейной несмещенной оценки, зависящей от двух наблюдений, есть

$$H(t) = \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-|x|t) + \exp(-h|x|t))(\exp(-|x|(1-t)) + \\ + \exp(-|x|h(1-t)))\,dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Произведя интегрирование, получим

$$H(t) = 2\gamma^2 \left(1 + \frac{1}{ht+1-t} + \frac{1}{h-ht+1} + \frac{1}{h}\right).$$

Максимум функции $H(t)$ достигается при $t = 0$, а минимум — при $t = {}^1/_2$, таким образом, при

$$L_c(s) = \begin{cases} 0, & |s| \leqslant c, \\ 1, & |s| > c, \end{cases}$$

для достаточно малых c выборочное среднее не будет оптимальной линейной несмещенной оценкой.

В связи с приведенным примером встает проблема описания плотностей распределения вектора $\mathbf{Y}$ в схеме (1), которым присуще

Свойство (A). При данной плотности распределения вектора $\mathbf{Y}$ выборочное среднее минимизирует значение критерия (4) при всех функциях потери из класса $\mathfrak{L}$.

Теорема 3. *Чтобы плотность f, принадлежащая классу F_m, обладала свойством* (A), *достаточно оптимальности выборочного среднего при функциях потери $L_c(s)$ для любого $c > 0$.*

Доказательство. Обозначим плотность распределения случайной величины $(\sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i\mathbf{Y}_i - \theta)^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^n \mathbf{T}_i\mathbf{Y}_i - \theta)$ через $f_{\mathbf{T}}$ и плотность, соответствующую оптимальному выбору матриц $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_n$, через $f_{\mathbf{T}_0}$. Рассмотрим $x \geqslant 0$. По условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_c(x) f_{\mathbf{T}}(x)\,dx \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} L_c(x) f_{\mathbf{T}_0}(x)\,dx \quad \forall c > 0. \tag{12}$$

Докажем, что неравенство (12) сохраняется для любой функции $L^*(s) \in \mathfrak{L}$. Введем обозначения:

$$M^+ = \{x \geqslant 0 : f_{\mathbf{T}_0}(x) - f_{\mathbf{T}}(x) > 0\},$$
$$M^- = \{x \geqslant 0 : f_{\mathbf{T}_0}(x) - f_{\mathbf{T}}(x) \leqslant 0\}.$$

Так как $f_{\mathbf{T}_0}$ и $f_{\mathbf{T}}$ измеримы относительно лебеговской меры, то $M^+ = \bigcup_j A_j$ и $M^- = \bigcup_j B_j$, где A_j и B_j — интервалы на прямой, причем пронумерованы они так, что если $x \in A_i$, $y \in B_i$, $z \in A_{i+1}$, то $x \leqslant y \leqslant z$. Очевидно, существует множество $U_1 \subset M^-$ такое, что

$$\int_{A_1} (f_{\mathbf{T}_0}(x) - f_{\mathbf{T}}(x))\,dx = \int_{U_1} (f_{\mathbf{T}}(x) - f_{\mathbf{T}_0}(x))\,dx,$$

причем $U_1 = \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i \cup B^0_{k_1+1}$, где $B^0_{k_1+1} \subseteq B_{k_1+1}$, а $k_1 \geqslant 1$ в силу неравенства (12). Далее, выбирая $U_2 = \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} B_i \cup \overset{0}{B}_{k_2+1} \setminus \overset{0}{B}_{k_1+1}$ такое, что

$$\int_{A_2} (f_{T_0}(x) - f_T(x))\,dx = \int_{U_2} (f_T(x) - f_{T_0}(x))\,dx, \text{ где } \overset{0}{B}_{k_2+1} \subseteq B_{k_2+1}, \quad \text{а } k_2 \geqslant 2,$$

получаем

$$\int_{A_1 \cup A_2 \cup U_1 \cup U_2} L^*(x) f_{T_0}(x)\,dx \leqslant \int_{A_1 \cup A_2 \cup U_1 \cup U_2} L^*(x) f_T(x)\,dx.$$

Продолжая описанный процесс, в силу абсолютной сходимости интегралов $\int_0^\infty L^*(x) f_{T_0}(x)\,dx$ и $\int_0^\infty L^*(x) f_T(x)\,dx$ приходим к неравенству

$$\int_{M^- \cup M^+} L^*(x) f_{T_0}(x)\,dx \leqslant \int_{M^- \cup M^+} L^*(x) f_T(x)\,dx. \tag{13}$$

Неравенство (13) является строгим, за исключением случая $L^*(x) = \mathrm{const}$. Аналогичное построение проводится для $x < 0$. Теорема 3 доказана.

В заключение рассмотрим линейное минимаксное оценивание θ в схеме (1) при $m = 1$ для функций потери L из класса $\mathfrak{L}$. В этом случае задача сводится к минимизации по вещественным числам $t_1, t_2, \ldots, t_n$, u интеграла

$$\int_{R^n} L\left(\left(\sum_{i=1}^n t_i y_i + u\right)^2\right) f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n)\,dy_1\,dy_2 \ldots dy_n \tag{14}$$

при ограничении $\sum_{i=1}^n t_i = 1$.

Теорема 4. *Все симметричные устойчивые законы обладают свойством* (A) $\forall n$.

Доказательство. Так как характеристическая функция симметричного устойчивого закона $g(t)$ представима в виде $g(t) = \exp(-c|t|^\alpha)$, где c и α некоторые положительные постоянные $(0 < \alpha \leqslant 2)$, то характеристическая функция случайной величины $\sum_{i=1}^n t_i y_i - \theta$ в силу независимости наблюдений равна $\prod_{i=1}^n \exp(-c|t|^\alpha |t_i|^\alpha)$. Нетрудно убедиться, что плотность любого симметричного устойчивого закона принадлежит F_1, а следовательно, согласно теореме 1 $u = 0$. Используя формулу обращения, (14) преобразуем к виду

$$\int_{-\infty}^\infty L(x^2) \left(\int_{-\infty}^\infty \cos tx \exp\left(-c|t|^\alpha \sum_{i=1}^n |t_i|^\alpha\right) dt \right) dx.$$

Сделав в последнем интеграле преобразование переменных $t\left(\sum_{i=1}^n |t_i|^\alpha\right)^{1/\alpha} = s$ и $x = y\left(\sum_{i=1}^n |t_i|^\alpha\right)^{1/\alpha}$, получим

$$\int_{-\infty}^\infty L\left(y^2 \left(\sum_{i=1}^n |t_i|^\alpha\right)^{2/\alpha}\right) p_\alpha(y)\,dy,$$

где $p_\alpha(y)$ — плотность распределения устойчивого закона. Осталось заметить, что $\min_{\sum_{i=1}^n t_i = 1} \sum_{i=1}^n |t_i|^\alpha = n^{1-\alpha}$. Теорема 4 доказана.

Для доказательства аналогичного результата для других плотностей нам понадобится

Лемма 2. *Если $f \in F_1$, то из оптимальности выборочного среднего для оценивания параметра θ в схеме* (1) *при $n = 2$ и $m = 1$ следует оптимальность выборочного среднего для $\forall n > 2$.*

Доказательство. Воспользуемся методом индукции. Пусть результат верен для $n = k$. При $n = k + 1$ задача сводится к поиску

$$\min_{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i=1} \int\limits_{R^{k+1}} L\left(\left(\sum_{i=1}^{k+1} t_i y_i\right)^2\right) \prod_{i=1}^{k+1} f(y_i)\, dy_i. \tag{15}$$

В силу теоремы (1) достаточно доказать, что (15) реализуется на $t_i = 1/(k+1)$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, при $L_c(s)\, \forall c > 0$. Разложим интеграл (15) в сумму двух интегралов:

$$2\int\limits_0^\infty \Bigg[\int\limits_{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t_i y_i\right)^2 \leqslant (c + t_{k+1} y_{k+1})^2} \prod_{i=1}^{k} (f(y_i)\, dy_i) \Bigg] f(y_{k+1})\, dy_{k+1} +$$

$$+2 \int\limits_{0 < y_{k+1} < c/t_{k+1}} \Bigg[\int\limits_{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} t_i y_i\right)^2 \leqslant (c - t_{k+1} y_{k+1})^2} \prod_{i=1}^{k} (f(y_i)\, dy_i) \Bigg] \times$$

$$\times \left(f(y_{k+1}) - f\left(\frac{c - t_{k+1} y_{k+1}}{t_{k+1}}\right)\right) dy_{k+1}. \tag{16}$$

Так как в области $0 < y_{k+1} < c/t_{k+1}$ $f(y_{k+1}) > f\left(\dfrac{c - t_{k+1} y_{k+1}}{t_{k+1}}\right)$, то оба интеграла по индукционному предположению минимизируются при $t_1 = t_2 = \ldots = t_k = \alpha$, где α некоторое число. В силу несмещенности оценки получим $t_{k+1} = 1 - \alpha k$. Затем с учетом полученного результата, повторив разложение (16) с заменой y_{k+1} на y_1, получим

$$[(k-1)\alpha + 1 - \alpha k]/k = \alpha,$$

откуда $\alpha = 1/(k+1)$, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Равномерная плотность, т. е. плотность* $p(s) = \begin{cases} 1/2, & |s| \leqslant 1, \\ 0, & |s| > 1, \end{cases}$ *обладает свойством* (A) $\forall n$.

Доказательство. Очевидно, $f \in F_1$, поэтому в силу леммы 2 достаточно доказать теорему для $n = 2$. Нетрудно вычислить, что плотность распределения $p_t(s - \theta)$ случайной величины $ty_1 + (1-t) y_2$, где y_1 и y_2 наблюдения, а t определяет линейную несмещенную оценку, представляет собой следующую функцию:

$$p_t(s) = \begin{cases} \dfrac{2t}{4t(1-t)}, & |s| \leqslant 1 - 2t, \\ \dfrac{1-s}{4t(1-t)}, & |s| > 1 - 2t, \end{cases} \qquad 0 < t < 1.$$

Тогда

$$\int_{-1}^{1} L(|s|)\,p_t(s)\,ds=\frac{1}{4}\,\frac{1}{t(1-t)}\Big[\int_0^{1-2t} 2tL(s)\,ds+\int_{1-2t}^{1}(1-s)\,L(s)\,ds\Big]. \qquad (17)$$

Сделав замену $t = 1/2 - \alpha$, преобразуем (17) к виду

$$\frac{1}{1-4\alpha^2}\,[\int_0^1 L(s)\,ds-\int_0^{2\alpha} 2\alpha L(s)\,ds-\int_{2\alpha}^{1} sL(s)\,ds],$$

откуда, так как $L(s)\in\mathfrak{L}$, получим

$$\frac{\int_0^1 L(s)\,(1-s)\,ds-\int_0^1 4\alpha^2(1-s)\,L(2\alpha s)\,ds}{1-4\alpha^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\int_0^1 L(s)\,(1-s)\,ds-\int_0^1 4\alpha^2(1-s)\,L(s)\,ds}{1-4\alpha^2}\geqslant\int_0^1 L(s)\,(1-s)\,ds.$$

Таким образом, минимум выражения (17) по t достигается при $t = 1/2$, что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Двусторонняя показательная плотность, т. е. плотность* $g(s) = 1/2\exp(-|s|)$, *обладает свойством* (A) $\forall n$.

Доказательство. Докажем результат для $n = 2$. Плотность распределения $g_t(s)$ случайной величины $ty_1 + (1-t)\,y_2$, где y_1 и y_2 — независимые случайные величины с плотностью $g(s)$, представима в виде

$$g_t(s)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-2t}\,[-t\exp(-s/t)+\exp(-s/1-t)-t\,\exp(-s/(1-t))\,].$$

$$0<t<1.$$

В силу теоремы 3 достаточно доказать

$$\max_{0<t<1}\int_0^{\alpha} g_t(s)\,ds=\int_0^{\alpha} g_{1/2}(s)\,ds \qquad \forall\alpha>0.$$

Но $\displaystyle\int_0^{\alpha} g_t(s)\,ds=\frac{1}{1-2t}[-\exp(-\alpha/1-t)\,(1-t)^2+$

$$+t^2\exp(-\alpha/t)+1-2t].$$

Сделав замену $t = 1/2 - \beta$, сведем задачу к поиску максимума по β функции

$$u_\alpha(\beta)=\frac{1}{2\beta}\Big(\Big(\frac{1}{2}-\beta\Big)^2\exp(-\alpha/(1/2-\beta))-\Big(\frac{1}{2}+\beta\Big)^2\times$$

$$\times\exp(-\alpha/(1/2+\beta))\Big)\quad\Big(-\frac{1}{2}<\beta<\frac{1}{2}\Big).$$

Нетрудно получить

$$\frac{d}{d\beta}\,u_\alpha(\beta)=-\frac{\exp(-\alpha(1/2+\beta))}{4\beta^2}(1+s)\,(1-4\beta^2)\times$$

$$\times\left[\exp(-2s)-\frac{1-s}{1+s}\right],$$

где $s=\frac{4\alpha\beta}{1-4\beta^2}>0$, а так как $\exp(-2s)-\frac{1-s}{1+s}>0$ $(s>0)$, то доказательство теоремы 6 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применения, М., 1968.
2. Barnard G. A., J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 25, 124—127 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/IX 1973

V. OLMAN

MINIMAKSNE LINEAARNE HINDAMINE MITTERUUTKAOFUNKTSIOONI KORRAL

Uuritakse juhusliku vektori matemaatilise ootuse lineaarse hindamise ülesannet ainult hinnangu ja nimetatud matemaatilise ootuse vahelisest kaugusest sõltuvate kaofunktsioonide korral. Hindamiskriteeriumiks on lineaarse hinnangu riski maksimaalväärtus. Näidatakse, et mõningate kitsenduste olemasolul juhusliku vektori jaotusele on optimaalne hinnang homogeenne ja et kumera kaofunktsiooni korral osutub optimaalseks hinnanguks vaatluste aritmeetiline keskmine. Tuuakse näiteid juhusliku vektori jaotustest, millede puhul vaatluste aritmeetiline keskmine osutub kõigi kirjeldatud kaofunktsioonide korral lineaarseks minimakshinnanguks.

V. OLMAN

MINIMAX LINEAR ESTIMATION UNDER NONQUADRATIC LOSS FUNCTIONS

The problem of linear estimation of the mathematical expectation ϑ of a random vector under non-decreasing loss functions which depend only on the distance between an estimator and the parameter ϑ is considered. As the criterion the linear estimator risk, maximum overall possible values of ϑ are used. It is shown that the minimax estimator is homogeneous under some restrictions for the distribution of the random vector, and the sample mean is the optimal estimator in case of convex loss functions. Examples are given of distributions of the random vector, for which the sample mean is minimax linear estimator under all described loss functions.