EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.2.02

УДК 535.345.1

П. КАРД

О МАТРИЦЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ОПТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Выведена простая общая формула для матрицы интерференции плоскопараллельного оптического слоя, показатель преломления которого изменяется внутри слоя непрерывно в перпендикулярном к слою направлении.

Введение

Оптические свойства слоистых сред, в частности, плоскопараллельных слоев с непрерывно изменяющимся показателем преломления, изучались во многих работах (см., напр., [1, 2]). В настоящей статье нашей целью является формулировка теории неоднородных оптических слоев в виде, аналогичном развитой в [3] формулировке теории дискретнослоистых оптических пленок.

Оптические свойства слоя описываются его матрицей интерференции. Наиболее простое и удобное представление матрицы интерференции однородного слоя дает формула автора (см. [3], с. 33)

$$L = \cos\alpha \cdot E + i \sin\alpha \cdot \overline{G}(-2v), \tag{1}$$

где E — единичная матрица,

$$\overline{G}(u) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & -\operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & -\operatorname{ch} u \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\alpha = knh\cos\vartheta \tag{3}$$

и

$$v = \frac{1}{2}\ln n \tag{4}$$

в случае нормального падения и

$$\left.\begin{aligned} v = v^{\parallel} &= \frac{1}{2}\ln(\cos\vartheta/n), \\ v = v^{\perp} &= \frac{1}{2}\ln(n\cos\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

в случае наклонного падения света, поляризованного, соответственно, параллельно или перпендикулярно плоскости падения. В формулах (3)—(5) k — волновое число, n — показатель преломления слоя, h — его толщина и ϑ — угол преломления в нем. Формула (1) справедлива одинаково как для диэлектрического, так и для поглощающего слоя.

Элементы матрицы интерференции имеют простой физический смысл:

$$L=\begin{pmatrix} b & \tilde{a}^* \\ a & \tilde{b}^* \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a&=r/t, \\ b&=1/t, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

а r и t — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания слоя при условии, что обе ограничивающие среды имеют $v=0$ (т. е., например, при нормальном падении света их показатель преломления равен единице). В формуле (6) звездочка означает комплексное сопряжение, а тильда — сопряженный слой, т. е. слой с показателем преломления n^* и углом преломления ϑ^* (см. [3], с. 18—19). Заметим еще, что под коэффициентом пропускания t понимаем везде отношение амплитуды прошедшей волны к амплитуде падающей, умноженное на $(n_2 \cos\vartheta_2/n_1 \cos\vartheta_1)^{1/2}$, где индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к средам, откуда свет падает и куда он проходит.

Теоретическое значение матрицы интерференции состоит в том, что аналогичная матрица (обозначаемая нами через F), относящаяся к произвольной многослойной пленке, выражается в виде произведения матриц интерференции отдельных слоев:

$$F=\begin{pmatrix} b_{0,N+1} & \tilde{a}^*_{0,N+1} \\ a_{0,N+1} & \tilde{b}^*_{0,N+1} \end{pmatrix}=G(v_0)\,L_1L_2\ldots L_N G(-v_{N+1}), \tag{8}$$

где N — число слоев; слои перенумерованы $1, 2, \ldots, N$ в направлении от исходной среды (индекс 0) к подложке (индекс $N+1$). Крайние множители учитывают возможное отличие v_0 и v_{N+1} от единицы; матрица G определяется формулой

$$G(u)=\begin{pmatrix} \operatorname{ch} u & \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} u & \operatorname{ch} u \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Связь элементов матрицы F с коэффициентами отражения $r_{0,N+1}$ и пропускания $t_{0,N+1}$ всей пленки имеет тот же вид (7), что и в случае отдельного слоя.

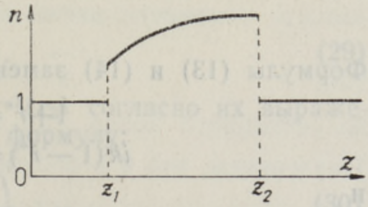
Формула (8) выведена в [3] для системы однородных слоев. Однако, как вытекает из смысла элементов матриц интерференции, она верна и в том случае, если некоторые или и все слои неоднородны. Под матрицами L следует понимать тогда по-прежнему матрицы $\begin{pmatrix} b & \tilde{a}^* \\ a & \tilde{b}^* \end{pmatrix}$ (см. формулу (6)); но формула (1) для неоднородного слоя уже неверна. Отсюда и возникает задача вывода обобщенной формулы для матрицы интерференции, пригодной для неоднородного слоя. Мы употребим для решения этой задачи хорошо известный и неоднократно использованный метод волнового уравнения (см., напр., [1, 2]).

Исходные соотношения

Так как случай наклонного падения света приводится путем введения эффективного показателя преломления к случаю нормального падения (что легко заключить из сопоставления формул (4) и (5)), то в нижеследующем будем считать падение нормальным.

Примем направление падения света (нормаль к слою) за ось z и обозначим границы слоя через z_1 и z_2, так что

$$h = z_2 - z_1. \tag{10}$$



Показатели преломления ограничивающих сред положим равными единице. Примерный график зависимости показателя преломления $n(z)$ (в случае его вещественности) от координаты z показан на рисунке. Подчеркнем, однако, что n может в интервале от z_1 до z_2 быть комплексным.

Обозначая волновую функцию (так наз. световое возбуждение, например, электрический вектор) через U, напишем волновое уравнение

$$U'' + k^2 n^2(z) U = 0, \tag{11}$$

где U'' означает вторую производную по z. Линейно независимые решения этого уравнения обозначим как U_1, U_2 и запишем общее решение в виде:

$$U = (C_1 U_1 + C_2 U_2) \exp(-ikz_1). \tag{12}$$

Падающая волна единичной амплитуды выражается как $\exp(-ikz)$, отраженная как $r \exp[ik(z-2z_1)]$, прошедшая как $t \exp[-ik(z-h)]$. Тогда условия непрерывности U и U' на границах слоя будут:

$$\left.\begin{aligned} 1 + r &= C_1 U_1(z_1) + C_2 U_2(z_1), \\ -ik(1-r) &= C_1 U'_1(z_1) + C_2 U'_2(z_1) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и

$$\left.\begin{aligned} t &= C_1 U_1(z_2) + C_2 U_2(z_2), \\ -ikt &= C_1 U'_1(z_2) + C_2 U'_2(z_2). \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Если введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U'_1/k & U'_2/k \end{pmatrix} \tag{15}$$

и

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

то эти условия примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1+r \\ -i(1-r) \end{pmatrix} &= A(z_1) C, \\ \begin{pmatrix} t \\ -it \end{pmatrix} &= A(z_2) C. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Напишем аналогичные формулы и для сопряженного слоя. Волновое уравнение имеет в сопряженном слое вид:

$$\tilde{U}''+k^2n^{*2}(z)\tilde{U}=0, \tag{18}$$

откуда следует, что в качестве его линейно независимых решений можно взять U^*_1 и U^*_2, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\tilde{U}^*_1&=U_1,\\ \tilde{U}^*_2&=U_2.\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Формулы (13) и (14) заменятся следующими:

$$\left.\begin{aligned}1+\tilde{r}^*&=\tilde{C}^*_1U_1(z_1)+\tilde{C}^*_2U_2(z_1),\\ ik(1-\tilde{r}^*)&=\tilde{C}^*_1U'_1(z_1)+\tilde{C}^*_2U'_2(z_1)\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\tilde{t}^*&=\tilde{C}^*_1U_1(z_2)+\tilde{C}^*_2U_2(z_2),\\ ik\tilde{t}^*&=\tilde{C}^*_1U'_1(z_2)+\tilde{C}^*_2U'_2(z_2),\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}1+\tilde{r}^*\\ i(1-\tilde{r}^*)\end{pmatrix}&=A(z_1)\tilde{C}^*,\\ \begin{pmatrix}\tilde{t}^*\\ i\tilde{t}^*\end{pmatrix}&=A(z_2)\tilde{C}^*.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Вывод формулы матрицы интерференции

Умножив равенства (17) и (22) слева на матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$, получим:

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\ r\end{pmatrix}&=B(z_1)C,\\ \begin{pmatrix}t\\ 0\end{pmatrix}&=B(z_2)C\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde{r}^*\\ 1\end{pmatrix}&=B(z_1)\tilde{C}^*,\\ \begin{pmatrix}0\\ \tilde{t}^*\end{pmatrix}&=B(z_2)\tilde{C}^*,\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где

$$B(z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}U_1+iU'_1/k & U_2+iU'_2/k\\ U_1-iU'_1/k & U_2-iU'_2/k\end{pmatrix}, \tag{25}$$

причем, если обозначим определитель Вронского уравнения (11) через $k\Delta$, т. е. положим

$$\begin{vmatrix}U_1 & U_2\\ U'_1/k & U'_2/k\end{vmatrix}=\Delta, \tag{26}$$

то

$$B^{-1}(z)=\frac{i}{\Delta}\begin{pmatrix}U_2-iU'_2/k & -(U_2+iU'_2/k)\\ -(U_1-iU'_1/k) & U_1+iU'_1/k\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Далее исключим C из (23) и $\tilde{C}^*$ из (24). В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} &= B(z_1)B^{-1}(z_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{a}^* \\ \tilde{b}^* \end{pmatrix} &= B(z_1)B^{-1}(z_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Объединяя оба эти уравнения, находим

$$L=B(z_1)B^{-1}(z_2). \tag{29}$$

Остается перемножить матрицы $B(z_1)$ и $B^{-1}(z_2)$ согласно их выражениям (25) и (27). Несложный расчет дает формулу:

$$L=\begin{pmatrix} l_0+l_3 & l_1-il_2 \\ l_1+il_2 & l_0-l_3 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где

$$\left.\begin{aligned} l_0&=(2\Delta)^{-1}(D_2-D_1), \\ l_1&=(2\Delta)^{-1}(D_2+D_1), \\ l_2&=(2\Delta)^{-1}(D-D_{12}), \\ l_3&=i(2\Delta)^{-1}(D+D_{12}), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

а величины D_1, D_2, D и D_{12} определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} D_1&=\frac{1}{k}\begin{vmatrix} U'_1(z_1) & U'_2(z_1) \\ U_1(z_2) & U_2(z_2) \end{vmatrix}, \\ D_2&=\frac{1}{k}\begin{vmatrix} U_1(z_1) & U_2(z_1) \\ U'_1(z_2) & U'_2(z_2) \end{vmatrix}, \\ D&=\begin{vmatrix} U_1(z_1) & U_2(z_1) \\ U_1(z_2) & U_2(z_2) \end{vmatrix}, \\ D_{12}&=\frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} U'_1(z_1) & U'_2(z_1) \\ U'_1(z_2) & U'_2(z_2) \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Удобно выразить матрицу интерференции также через матрицы Паули (см. [4], с. 210):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1&=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2&=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3&=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

образующие матричный трехмерный вектор $\vec{\sigma}$. Вводя его в формулу (30), находим

$$L=l_0E+\vec{l}\,\vec{\sigma}, \tag{34}$$

где вектор $\vec{l}$ имеет компоненты l_1, l_2, l_3. Отметим, что, так как

$$b\tilde{b}^*-a\tilde{a}^*=1 \tag{35}$$

(см. [1], с. 29), то, в силу формулы (6), величины l_0 и $\vec{l}$ связаны соотношением

$$l_0^2-\vec{l}^2=1, \tag{36}$$

которое позволяет ввести величину θ:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ch}\theta&=l_0,\\ \operatorname{sh}\theta&=|\vec{l}|.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Подчеркнем, что θ в общем случае комплексная величина.

Заключительные замечания

Легко видеть, что величины l_0 и $\vec{l}$ не зависят от конкретного выбора базисных решений U_1, U_2. Поэтому нет надобности налагать на эти решения какие-либо условия. Ясно также, что, хотя формулы (32) содержат z_1 и z_2, величины D_1, D_2, D, D_{12} и с ними l_0 и $\vec{l}$ от выбора начала координат не зависят. В частном случае однородного слоя формула (30) приводится к виду (1). Положив, например,

$$\left.\begin{aligned} U_1&=\exp(-iknz),\\ U_2&=\exp(iknz),\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

находим:

$$\left.\begin{aligned} l_0&=\cos\alpha,\\ l_1&=0,\\ l_2&=-\sin\alpha\operatorname{sh}2v,\\ l_3&=i\sin\alpha\operatorname{ch}2v,\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

откуда и вытекает формула (1).

Равенство $l_1=0$ свойственно не только однородному слою, но характерно вообще для любого симметричного слоя, так как у симметричного слоя всегда

$$a+\tilde{a}^*=0 \tag{40}$$

(см. [1], с. 30). А если поглощение в слое отсутствует, то $\tilde{a}=a$ и $\tilde{b}=b$, откуда следует вещественность l_0, l_1 и l_2 и мнимость l_3.

Выражение матрицы L через матрицы Паули позволяет очень просто выполнять перемножение нескольких матриц L. Например,

$$L_1L_2=(l_{0,1}l_{0,2}+\vec{l}_1\vec{l}_2)E+[l_{0,1}\vec{l}_2+l_{0,2}\vec{l}_1+i(\vec{l}_1\times\vec{l}_2)]\vec{\sigma}, \tag{41}$$

так что, обозначая l_0 и $\vec{l}$ этого произведения индексами 12, имеем рекуррентные формулы:

$$\left.\begin{aligned} l_{0,12}&=l_{0,1}l_{0,2}+\vec{l}_1\vec{l}_2,\\ \vec{l}_{12}&=l_{0,1}\vec{l}_2+l_{0,2}\vec{l}_1+i(\vec{l}_1\times\vec{l}_2).\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Очень просто выражается, в частности, любая целая степень матрицы L. Из формулы (41) следует

$$L^2 = (l_0^2 + \vec{l}^2)E + 2l_0 \vec{l}\vec{\sigma} \tag{43}$$

или, согласно (37),

$$L^2 = \mathrm{ch}\, 2\theta \cdot E + (\mathrm{sh}\, 2\theta/\mathrm{sh}\, \theta)\vec{l}\vec{\sigma}. \tag{44}$$

Методом полной индукции находим затем и общую формулу

$$L^m = \mathrm{ch}\, m\theta \cdot E + (\mathrm{sh}\, m\theta/\mathrm{sh}\, \theta)\vec{l}\vec{\sigma}, \tag{45}$$

откуда непосредственно вытекает формула для целой отрицательной степени:

$$L^{-m} = \mathrm{ch}\, m\theta \cdot E - (\mathrm{sh}\, m\theta/\mathrm{sh}\, \theta)\vec{l}\vec{\sigma}. \tag{46}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Kofink W., Ann. Phys. (6), 1, 119 (1947).
2. Ребане К. К., Уч. записки Тартуск. гос. ун-та, вып. 62, 180 (1958).
3. Кард П. Г., Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок, Таллин, 1971.
4. Розенберг Г. В., Оптика тонкослойных покрытий, М., 1958.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 7/XII 1973

P. KARD

MITTEHOMOGEENSE OPTILISE KIHI INTERFERENTSMAATRIKSIST

Mittehomogeense optilise kihi interferentsmaatriks L leitakse valemi (34) kujul, kus E on kaherealine ühikmaatriks, $\vec{\sigma}$ on (33) järgi Pauli vektormaatriks, l_0 ja vektori $\vec{l}$ komponendid l_1, l_2, l_3 avalduvad valemite (26), (31) ja (32) kohaselt. Nendes valemites on U_1 ja U_2 lainevõrrandi (11) lineaarselt sõltumatud lahendid ja z_1, z_2 — kihi piirpindade koordinaadid. Valem (34) kehtib võrdselt nii dielektrilise kui ka neelava kihi jaoks. Eeldusel, et kihti piiravate keskkondade murdumisnäitaja on 1, on kihi amplituudne peegeldumistegur r ja amplituudne läbilaskvustegur t seotud maatriksi L elementidega valemite (6) ja (7) kaudu, kus tilde on kaaskihi märk.

P. KARD

ON THE INTERFERENCE MATRIX OF AN INHOMOGENEOUS OPTICAL FILM

A simple formula (34) for the interference matrix, L, of an inhomogeneous optical film is derived. In this formula E is the 2×2 unit matrix, $\vec{\sigma}$ is by (33) the Pauli vector matrix, l_0 and components l_1, l_2, l_3 of the vector $\vec{l}$ are defined by formulae (26), (31) and (32), where U_1, U_2 are the linearly independent solutions of the wave equation (11), and z_1, z_2 are co-ordinates of the film boundaries. Formula (34) is valid equally for absorbing as well as for dielectric films. Elements of the matrix L, provided that ambient media have refractive index 1, relate to the amplitude reflectance, r, and amplitude transmittance, t, of the film by the formulae (6) and (7), where tilde refers to the conjugated film.