EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.2.01

УДК 517.52

Г. КАНГРО

О СКОРОСТИ СУММИРУЕМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ТРЕУГОЛЬНЫМИ РЕГУЛЯРНЫМИ МЕТОДАМИ. II

С помощью теоремы 2, доказанной в I части настоящей статьи [1], для класса $\mathfrak{A}$ регулярных нижних треугольных методов суммирования решаются (сформулированные в [1]) три основные проблемы применительно к скорости суммируемости п. в. действительных ортогональных рядов, для которых ряды из квадратов коэффициентов сходятся с некоторой скоростью. Показывается, что класс $\mathfrak{A}$ содержит обобщенный метод Валле—Пуссена (V,α), разрывный метод Рисса (R^*, p_n, α), метод Чезаро (C, α), метод сумматорной функции $A(\psi)$, многие методы Хаусдорфа и метод A^p, введенный в [2].

4. Следствия из основной теоремы

При $\lambda_n = 1$ из теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Если $A \in \mathfrak{A}$ и $\sum a_n^2 < \infty$, то ряд* (1) *A-суммируем п. в. тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм $s_{\nu(n)}$ ряда* (1) *сходится п. в.*

Приведем две леммы Лейндлера [3], которые понадобятся при доказательстве следующих двух теорем, решающих соответственно проблемы I и II для методов класса $\mathfrak{A}$.

Лемма 1. *Пусть $\nu(n)\uparrow$ — индексы и $0 < \mu_n \uparrow$ — любые числа такие, что*

$$\mu_{\nu(n)+1} = \mu_{\nu(n)+2} = \ldots = \mu_{\nu(n+1)}.$$

Тогда сходимость последовательности $\nu(n)$-х частичных сумм ряда $\Sigma \mu_n u_n$ влечет за собой регулярную сходимость со скоростью $\{\mu_{\nu(n)+1}\}$ последовательности $\nu(n)$-х частичных сумм ряда Σu_n.

Лемма 2. *Если при некоторой постоянной $K > 1$ имеем*

$$\lambda_{\nu(n+1)} \geqslant K\lambda_{\nu(n)}, \tag{41}$$

то из условия (26) *вытекает регулярная сходимость п. в. со скоростью $\{\lambda_{\nu(n)}\}$ последовательности $\nu(n)$-х частичных сумм ряда* (1).

Теорема 4. *Пусть $A \in \mathfrak{A}$ и последовательность λ удовлетворяет условию* (27). *Если числа ϱ_n^2 являются множителями Вейля для A-суммируемости п. в. ряда* (1), *то $\varrho_n^2\lambda_n^2$ — множители Вейля для регулярной A^λ-суммируемости п. в. ряда* (1).

Доказательство. Поскольку $A \in \mathfrak{A}$, то можем определить индексы $\nu(n)$ соотношениями (25). Положим

$$\mu_k = \lambda_{\nu(n)} \quad \text{при} \quad \nu(n) < k \leqslant \nu(n+1).$$

Тогда $0 < \mu_k \uparrow$, причем $\mu_k \leqslant \lambda_k$, и из условия (3) следует

$$\sum_n a_n^2 \mu_n^2 \varrho_n^2 < \infty.$$

Тогда ряд

$$\sum_n a_n \mu_n \varphi_n, \tag{42}$$

по предположению, A-суммируем п. в. Согласно теореме 3 последовательность $\nu(n)$-х частичных сумм ряда (42) сходится п. в. Применяя к ряду (42) лемму 1 при $u_n = a_n \varphi_n$, устанавливаем регулярную сходимость п. в. последовательности частичных сумм $s_{\nu(n)}$ ряда (1) со скоростью $\{\mu_{\nu(n)+1}\} = \{\lambda_{\nu(n)}\}$. Из теоремы 2 теперь вытекает регулярная A^λ-суммируемость п. в. ряда (1). Теорема доказана.

Теорема 5. *Если $A \in \mathfrak{A}$, последовательность λ удовлетворяет условиям* (27) *и*

$$\exists \varepsilon \in (0, 1): \lambda_n B_{nk}^{\varepsilon} \geqslant m \lambda_k, \tag{43}$$

где $m > 0$ — постоянная, то λ_n^2 — множители Вейля для регулярной A^λ-суммируемости п. в. ряда (1).

Доказательство. Так как $A \in \mathfrak{A}$, то согласно первому из условий (24) существует постоянная $M > 0$ такая, что $B_{nk} \leqslant M$. Выберем $q \in (0, 1)$ так, чтобы $q < m^{1/\varepsilon}/M$, и определим индексы $\nu(n)$ соотношениями (25). Тогда

$$B_{\nu(n+1), \nu(n)} \leqslant qM,$$

вследствие чего из (43) находим

$$(qM)^{\varepsilon} \lambda_{\nu(n+1)} \geqslant \lambda_{\nu(n+1)} B_{\nu(n+1), \nu(n)}^{\varepsilon} \geqslant m \lambda_{\nu(n)},$$

откуда следует условие (41) с $K = m/(qM)^{\varepsilon} > 1$.

Пусть выполнено условие (26). Тогда согласно лемме 2 последовательность частичных сумм $s_{\nu(n)}$ ряда (1) регулярно сходится п. в. со скоростью $\{\lambda_{\nu(n)}\}$. Тем самым из теоремы 2 вытекает регулярная A^λ-суммируемость п. в. ряда (1). Теорема доказана.

Для применений полезно выразить условие (26) через наилучшие приближения

$$E_n(f) = \min_{\alpha_k} \|f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k\|_{L_\mu^2}$$

функции $f \in L_\mu^2$, определяемой рядом (1). Поскольку

$$E_n^2(f) = \sum_{k \geqslant n+1} a_k^2,$$

то, положив $\lambda_0 = 0$ (что не влияет на выполнение условия (26)), получим

$$\sum_{n \geqslant 1} a_n^2 \lambda_n^2 = \sum_{n \geqslant 1} a_n^2 \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2) = \sum_k (\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2) E_k^2(f),$$

и из теоремы 5 вытекает

Следствие 1. Если выполнены предположения теоремы 5 и

$$\sum_k (\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2) E_k^2(f) < \infty,$$

то ряд (1) регулярно A^λ-суммируем п.в. к функции f.

Пусть в промежутке $[0, \infty)$ определена положительная монотонно возрастающая функция Φ. Обозначим через R_{Φ}^{μ} класс функций $f \in L_{\mu}^2$, при которых

$$\Phi(n) E_n^2(f) = O(1).$$

Так как для $f \in L_{\mu}^2$ имеем *

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2) E_k^2(f) = O(1) \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_{k+1}^2 - \lambda_k^2}{\Phi(k)} = O(1) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda^2(t)}{\Phi(t)},$$

то из следствия 1 вытекает

Следствие 2. Если выполнены предположения теоремы 5, $f \in R_{\Phi}^{\mu}$ и

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda^2(t)}{\Phi(t)} < \infty,$$

то ряд (1) регулярно A^{λ}-суммируем п. в. к функции f.

Следующая теорема решает проблему III для методов класса $\mathfrak{A}$.

Теорема 6. *Если методы $A, \bar{A} \in \mathfrak{A}$ удовлетворяют условию*

$$m B_{nk} \leqslant \bar{B}_{nk} \leqslant M B_{nk}, \tag{44}$$

($M, m > 0$ — *постоянные*), *а последовательность* λ — *условию* (27), *то методы A и $\bar{A}$ равносильны относительно регулярной λ-суммируемости п. в. ряда* (1), *удовлетворяющего условию* (26).

Доказательство. Пусть ряд (1), удовлетворяющий условию (26), регулярно A^{λ}-суммируем п. в. Тогда согласно теореме 2 последовательность частичных сумм $s_{\nu(n)}$ ряда (1) регулярно сходится п. в. со скоростью $\{\lambda_{\nu(n)}\}$. Взяв при определении индексов $\nu(n)$ из соотношений (25) число $q < m/M$, на основе (44) находим

$$\bar{B}_{\nu(n+1), \nu(n)} \leqslant \bar{q} \bar{B}_{\nu(n), \varkappa},$$

где $\bar{q} = Mq/m < 1$, причем $\varkappa$ — наименьшее значение индекса k, при котором $\bar{B}_{\nu(n),k} \neq 0$. Кроме того, из условий (44) и (27) вытекает справедливость условия (27) для метода $\bar{A}$. Поэтому на основе теоремы 2 ряд (1) регулярно $\bar{A}^{\lambda}$-суммируем п. в. Поскольку теорема 6 выражается относительно методов A и $\bar{A}$ симметрично, то доказательство завершено.

5. Примеры

Приведем некоторые примеры методов класса $\mathfrak{A}$.

Пример 3. Обобщенный метод Валле—Пуссена (V, α) (см. пример 1). При $A = (V, \alpha)$ ввиду условий $\alpha_n \uparrow$ и $(n - \alpha_n) \uparrow$ имеем

$$A_{nk} \leqslant A_{mk}, \quad n > m,$$

вследствие чего $(V, \alpha) \in \mathfrak{A}$ (при $B_{nk} = A_{nk}$). Частный случай теорем 3—5 при $A = (V, \alpha)$ рассмотрен в [4], где вместо условия (27) вводится условие

$$\lambda_{\nu(n+1)} \leqslant K \lambda_{\nu(n)} \tag{45}$$

при $K < \sqrt{2}$, причем индексы $\nu(n)$ определяются индуктивно соотношениями

* Функция λ определяется в целочисленных точках n равенством $\lambda(n) = \lambda_n$, а в промежутках $(n, n+1)$ — непрерывной интерполяцией, сохраняющей монотонность.

$$\nu(0)=1, \quad \nu(n+1)=\nu(n)+\alpha_{\nu(n)}.$$

Из (27) ввиду неравенства $\alpha_{n+1} \leqslant 2\alpha_n$ следует (45) при более слабом ограничении $K < 2$.

Частный случай следствий 1 и 2 для $A = (V, \alpha)$ изучен в [5] при $\alpha_{2n-1} = n$ и $\lambda_n = (n+1)^\gamma$, $\gamma > 0$.

Пример 4. Разрывный метод Рисса (R^*, p_n, α) (см. пример 2). В силу неравенства (17) для метода (R^*, p_n, α) имеем

$$A_{nk} \leqslant \max\{\alpha, \alpha^{-1}\} A_{mk}, \quad n > m,$$

и, следовательно, $(R^*, p_n, \alpha) \in \mathfrak{A}$ (при $B_{nk} = A_{nk}$). В случае $A = (R^*, p_n, 1)$ теорема 3 доказана в [6], а теоремы 4 и 5 — в [3] при скоростях λ, определяемых неравенством (45) с $K < 2$, причем $\nu(n)$ вычисляется из уравнения ** $P_{\nu(n)} = 2^n$. Можно показать (ср. пример 5), что те же самые скорости получаются из условия (27) при $A = (R^*, p_n, 1)$, т. е. из условия (20).

Следствия 1 и 2 рассматривались в [5] для метода арифметических средних при $\lambda_n = (n+1)^\gamma$, $0 < \gamma < 1$.

При

$$A = (R^*, p_n, \alpha) \quad \text{с} \quad \alpha > 0, \quad \bar{A} = (R^*, p_n, 1)$$

ввиду условия (17) имеет место (18). Тем самым из теоремы 6 вытекает, что методы A и $\bar{A}$ равносильны относительно регулярной λ-суммируемости п. в. ряда (1), если λ удовлетворяет условиям (26) и (20). В частном случае $\lambda = 1$ соответствующий результат получен в [6] для непрерывных методов Рисса (R, p_n, α) и (R, p_n, β) с $\alpha, \beta > 0$.

Примечание 2. Согласно примечанию 1 для методов Чезаро $A = (C, \alpha)$ с $\alpha > 0$ и $\bar{A} = (C, 1)$ условие (18) выполнено. Поскольку $A, \bar{A} \in \mathfrak{A}$, то из теоремы 6 вытекает равносильность методов A и $\bar{A}$ относительно регулярной λ-суммируемости п. в. ряда (1), если λ удовлетворяет условиям (26) и (21). При ограничении, что в условии (21) $c \in (0, 1/2)$, соответствующий результат получен в [7].

Пример 5. Метод сумматорной функции. Метод $A = A(\psi)$, заданный с помощью преобразования ряда в последовательность треугольной матрицей (α_{nk}), называется методом сумматорной функции, если элементы α_{nk} выражаются через некоторую функцию ψ с $\psi(0) = 1$ в виде

$$\alpha_{nk} = \psi\left(\frac{k}{n+1}\right).$$

Если $\psi \in \mathrm{Lip}\, 1$, то согласно формулам (5) и (16) имеем

$$A_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k} |\alpha_{n\nu} - \alpha_{n,\nu+1}| = O(1)\frac{k+1}{n+1}, \quad k \leqslant n,$$

вследствие чего выполнено условие (23), где B — метод арифметических средних. Теперь нетрудно убедиться, что $A \in \mathfrak{A}$, причем из теорем 3—5 вытекают результаты статей [8–11]. В этих статьях вместо условия (21), в которое превращается условие (27) при $A = A(\psi)$, фигурирует условие (45) с $1 < K < q$, где q связано с индексом $\nu(n)$ соотношением

$$\alpha_1 q^n \leqslant \nu(n) \leqslant \alpha_2 q^n, \quad n > 0, \tag{46}$$

** Здесь $\nu(n)$ может принимать и нецелые значения.

в котором $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ — постоянные. Покажем равносильность этого условия условию (21).

Для заданных n и $k \leqslant n$ существуют индексы m и l такие, что

$$\nu(m) \leqslant n < \nu(m+1), \quad \nu(l) \leqslant k < \nu(l+1).$$

Определим c из условия $q^c = K$. Тогда в силу неравенства $1 < K < q$ число $c \in (0, 1)$, причем c может принимать все значения из $(0, 1)$. Ввиду $\lambda_n \uparrow$ и условий (45) и (46), имеем

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_k} \leqslant \frac{\lambda_{\nu(m+1)}}{\lambda_{\nu(l)}} \leqslant q^{c(m+1-l)} = q^{2c}(q^{m-l-1})^c \leqslant$$

$$\leqslant q^{2c}\left[\frac{\nu(m)\alpha_2}{\alpha_1\nu(l+1)}\right]^c < \left(\frac{q^2\alpha_2}{\alpha_1}\right)^c \left(\frac{n+1}{k+1}\right)^c,$$

откуда и вытекает условие (21).

Пример 6. Обозначим через $A^p(C)$, $p > 1$, класс методов $A = (a_{nk})$, удовлетворяющих условиям 1° из § 3 и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|a_{nk}|^p}{|c_{nk}|^{p-1}} = O(1),$$

где $C = (c_{nk}) \in \mathfrak{A}$, $c_{nk} \neq 0$ при $k \leqslant n$. С помощью неравенства Гёльдера из формулы (5) находим

$$A_{nk} \leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{k} \frac{|a_{n\nu}|^p}{|c_{n\nu}|^{p-1}}\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=0}^{k} |c_{n\nu}|\right)^{1/q} = O(1)\, C_{nk}^{1/q}$$

при $1/p + 1/q = 1$. Ввиду $C \in \mathfrak{A}$ отсюда вытекает $A^p(C) \subset \mathfrak{A}$. Частный случай $A^p = A^p(C)$, где C — метод арифметических средних, изучен в [12, 13]. Результаты статей [12, 13] вытекают из теорем 3—5, причем из условия (27) выявляется (ср. пример 5), что в [13] условие $\lambda_n (n+1)^{-1/q} \downarrow$ является излишним. Отметим, что классу A^p принадлежит метод $A(\psi)$ при $\psi(u) = \int_u^1 \chi(t)\,dt$, $\chi \in L^p$, и метод Хаусдорфа (H, g) с $g(u) = \int_0^u \chi(t)\,dt$, $\chi \in L^p$ [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 3 (1974).
2. Shohat J. A., Tamarkin J. D., The problem of moments, New York, 1943.
3. Leindler L., Acta scient. math., 24, 129 (1963).
4. Leindler L., Acta math. Acad. scient. hung., 16, 375 (1965).
5. Leindler L., Acta math. Acad. scient. hung., 15, 57 (1964).
6. Zygmund A., Bull. int. Acad. polon. sci. lettres, sér. A, 295 (1927).
7. Мартин Э., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 305, 222 (1972).
8. Ефимов А. В., Успехи матем. наук, 22, 119 (1967).
9. Ефимов А. В., Матем. заметки, 4, 261 (1968).
10. Болгов В. А., Применение функционального анализа в теории приближений (материалы конф.), Калинин, 1970.
11. Болгов В. А., Некоторые вопросы суммируемости ортогональных рядов линейными методами (автореф. дисс.), Калинин, 1970.
12. Болгов В. А., Матем. заметки, 4, 697 (1968).
13. Болгов В. А., Ефимов А. В., Изв. АН СССР, Сер. матем., 35, 1389 (1971).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 18/VII 1973

G. KANGRO

ORTOGONAALRIDADE SUMMEERIMISE KIIRUSEST KOLMNURKSETE REGULAARSETE MENETLUSTE ABIL. II

Artikli I osas [1] on antud tarvilik ja piisav tingimus selleks, et reaalne ortogonaalrida $\Sigma a_n\varphi_n$, kus $\Sigma a_n^2\lambda_n^2 < \infty$, oleks regulaarselt A^λ-summeeruv peaaegu kõikjal iga menetluse A puhul, mis on teatavast ulatuslikust regulaarsete alumiste kolmnurksete menetluste klassist $\mathfrak{A}$. Selle tingimuse abil lahendatakse kolm ortogonaalrea summeeruvuse kiiruse $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$ põhiprobleemi klassi $\mathfrak{A}$ menetluste jaoks. Näidatakse, et klassi $\mathfrak{A}$ kuuluvad üldistatud Vallée-Poussini menetlus (V, α), katkev Rieszi menetlus (R^*, p_n, α), Cesàro menetlus (C, α), summatoorse funktsiooni menetlus $A(\psi)$, mitmed Hausdorffi menetlused ja menetlus A^p [2].

G. KANGRO

ON THE SPEED OF SUMMABILITY OF ORTHOGONAL SERIES BY TRIANGULAR REGULAR METHODS. II

In part I of the present paper [1] a necessary and sufficient condition for regular A^λ-summability almost everywhere, of real orthogonal series $\Sigma a_n\varphi_n$ with $\Sigma a_n^2\lambda_n < \infty$ by every method A from a wide class $\mathfrak{A}$ of regular lower triangular methods was proved. By means of this condition, for methods of $\mathfrak{A}$ three fundamental problems on the speed $\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$ of summability almost everywhere, of orthogonal series are solved. It is shown that $\mathfrak{A}$ contains generalized Vallée-Poussin method (V, α), discontinuous Riesz method (R^*, p_n, α), Cesàro method (C, α), summatoric function method $A(\psi)$, several Hausdorff methods and method A^p [2].