

А. ВОЛЬДЕК, В. МАТИН

МАГНИТНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ВОЗДУШНОГО ЗАЗОРА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН С ОДНОСТОРОННЕЙ ЗУБЧАТОСТЬЮ

Вводные замечания

Углубление теории обычных и разработка специальных типов электрических машин вызывает необходимость совершенствования способов расчета магнитных полей в воздушном зазоре с учетом его неравномерности. Удобную основу для исследования магнитных полей и связанных с ними явлений представляет метод гармонических проводимостей (или метод удельной проводимости зазора) [1-3], получивший в последнее время широкое распространение. При этом обычно пользуются графиками амплитуд гармоник проводимости для гладкой поверхности зазора при односторонней зубчатости [3]. Эти кривые рассчитаны на основе имеющихся решений задач о поле в зубчатом зазоре электрической машины, полученных методом конформных отображений (см., напр., [4] и др.).

Однако в ряде случаев необходимо иметь данные о структуре магнитного поля не только на гладкой, но и на зубчатой поверхности зазора или на любой промежуточной плоскости в зазоре (линейные синхронные двигатели, жидкометаллические индукционные магнитогидродинамические машины и др.). Решения, полученные методом конформных отображений, для этой цели мало пригодны, так как они даются в неявном виде, следы указанных поверхностей на отображенной плоскости поэтому неизвестны и расчеты становятся трудоемкими. Некоторые данные о распределении поля на указанных поверхностях получены методом моделирования или численным путем [5-8], но они совершенно недостаточны.

Ввиду сказанного, для расчета кривых амплитуд гармоник магнитной проводимости целесообразно получить решение задачи о поле в зазоре с односторонней зубчатостью с помощью одного из методов математической физики. Подобным образом указанную задачу решил Б. С. Зечихин [8], однако решение им получено в сложной форме, что затрудняет численные расчеты и ограничивает их точность. Рассчитанные Б. С. Зечихиным кривые не охватывают всего диапазона геометрических соотношений и порядков гармоник, представляющих практический интерес. Поэтому целесообразно новое решение задачи. При этом наиболее подходящим нам представляется метод Г. А. Гринберга [9], дающий решение непосредственно в виде ряда Фурье.

Скалярный потенциал магнитного поля

Рассмотрим спрямленную машину с бесконечным чередованием зубцов и пазов. Выделим одно зубцовое деление (рис. 1). Примем глубину паза и магнитную проводимость стали μ_c бесконечными, что не вводит значительной погрешности, но упрощает решение задачи. Аналогично работе [10] введем относительные размеры

$$t^* = 2t/t_3, \quad b^* = 2b/t_3, \quad \delta^* = 2\delta/t_3, \\ x^* = 2x/t_3, \quad y^* = 2y/t_3$$

и относительный магнитный потенциал $\varphi^* = \varphi/\varphi_0$. В дальнейшем знак * будем опускать.

Распределение магнитного потенциала на пограничных поверхностях указано на рис. 1. Обозначим магнитные потенциалы выделенных областей I и II через

$$\Phi_I(x, y) = U(x, y) = U \\ \text{и} \quad \Phi_{II}(x, y) = V(x, y) = V.$$

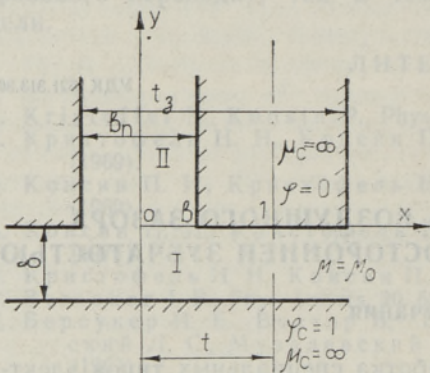


Рис. 1. Область воздушного зазора.

В каждой из областей они должны удовлетворять уравнению Лапласа, т. е.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (1б)$$

Рассмотрим прямоугольную область I на протяжении половины периода изменения поля, т. е. при $0 \leq x \leq 1$.

Найдем функцию $U = U(x, y)$, удовлетворяющую (1a) и следующим граничным условиям:

$$U|_{y=0} = 0, \quad b \leq x \leq 1; \quad (2a)$$

$$U|_{y=0} = f(x), \quad 0 \leq x \leq b; \quad (2б)$$

$$U|_{y=-\delta} = 1; \quad (2в)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0; \quad (2г)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (2д)$$

Здесь $f(x)$ — неизвестная пока функция. Решение уравнения (1a) в случае граничных условий (2г) и (2д), по Г. А. Гринбергу, ищется в виде ряда Фурье

$$U = \frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\pi x), \quad (3)$$

где коэффициенты ряда

$$U_n = 2 \int_0^1 U(x, y) \cos(n\pi x) dx. \quad (4)$$

Умножим уравнение (1а) на $2\cos(n\pi x)dx$ и проинтегрируем его по x в пределах от 0 до 1. При этом получим для определения U_n уравнение

$$\frac{d^2 U_n}{dy^2} - (n\pi)^2 U_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

решение которого запишем в виде

$$U_n = A_n \operatorname{sh}(n\pi y) + B_n \operatorname{ch}(n\pi y), \quad n \geq 1; \quad (6)$$

$$U_0 = C_0 y + D_0, \quad n = 0. \quad (7)$$

Используя выражение (4), приведем граничные условия (2б) и (2в) к виду

$$U_n|_{y=0} = 2 \int_0^1 U(x, 0) \cos(n\pi x) dx = U_{n0}; \quad (8)$$

$$\begin{cases} U_n|_{y=-\delta} = 2 \int_0^1 U(x, -\delta) \cos(n\pi x) dx = 0, & n \geq 1; \\ U_0|_{y=-\delta} = 2 \int_0^1 U(x, -\delta) dx = 2, & n = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь U_{n0} ($n=0, 1, 2, \dots$) — также неизвестные еще функции.

Из (6)–(9) определим постоянные A_n , B_n , C_0 и D_0 :

$$A_n = U_{n0} \operatorname{cth}(n\pi\delta); \quad B_n = U_{n0}; \quad (10)$$

$$C_0 = \frac{U_{00} - 2}{\delta}; \quad D_0 = U_{00}. \quad (11)$$

Подставив (10) и (11) в (6), (7) и (3), получим общее решение уравнения (1а) в области I

$$U = \frac{U_{00} - 2}{2\delta} y + \frac{U_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} \frac{\operatorname{sh} n\pi(y+\delta)}{\operatorname{sh}(n\pi\delta)} \cos(n\pi x). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь поле в области II. Согласно Г. А. Гринбергу, область $-b \leq x \leq b$ соответствует половине периода искомой функции. Ввиду симметрии можно рассматривать только четверть периода этой функции, в пределах $0 \leq x \leq b$.

Найдем функцию $V = V(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1б) и следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0; \quad V|_{x=b} = 0; \quad (13а)$$

$$V|_{y=\infty} = 0; \quad V|_{y=0} = f(x). \quad (13б)$$

Решение уравнения (1б) в соответствии с граничными условиями (13а) ищем в виде ряда Фурье

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} V_m \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right) \pi x, \quad (14)$$

где

$$V_m = \frac{2}{b} \int_0^b V(x, y) \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right) \pi x dx. \quad (15)$$

Аналогично предыдущему, умножая (16) на $\frac{2}{b} \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi x dx$ и интегрируя по x в пределах от 0 до b , получим уравнение

$$\frac{d^2 V_m}{dy^2} - \left(\frac{2m-1}{2b}\pi\right)^2 V_m = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (16)$$

решение которого запишем в виде

$$V_m = A_m e^{\frac{2m-1}{2b}\pi y} + B_m e^{-\frac{2m-1}{2b}\pi y}. \quad (17)$$

Используя (15), приведем граничные условия (13б) к виду

$$V_m|_{y=\infty} = \frac{2}{b} \int_0^b V(x, \infty) \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi x dx = 0; \quad (18)$$

$$V_m|_{y=0} = \frac{2}{b} \int_0^b V(x, 0) \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi x dx = V_{m0}. \quad (19)$$

Здесь V_{m0} ($m=1, 2, 3, \dots$) — неизвестная пока функция. Из (17) — (19) определим постоянные

$$A_m = 0; \quad B_m = V_{m0}. \quad (20)$$

На основании (14), (17) и (20) общее решение (16) для области II получим в виде

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} V_{m0} e^{-\left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi y} \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi x. \quad (21)$$

Используем теперь граничные условия на поверхности раздела двух областей при $0 \leq x \leq b$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{y=0}; \quad (22a)$$

$$U|_{y=0} = V|_{y=0}. \quad (22б)$$

На основании (12), (21) и (22a) можно записать

$$\begin{aligned} & \frac{U_{00} - 2}{2\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} n\pi \cos(n\pi x) = \\ & = - \sum_{m=1}^{\infty} V_{m0} \left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi x. \end{aligned} \quad (23)$$

Умножая обе части (23) на $\frac{2}{b} \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right)\pi x dx$ и интегрируя по x в пределах от 0 до b , получим

$$\begin{aligned} V_{m0} = & - \frac{8b}{\delta\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} - \frac{4b}{\delta\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} U_{00} - \\ & - \frac{4}{(2m-1)\pi} \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} n\pi \operatorname{cth}(n\pi\delta) C_{m,n}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$C_{m,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-1} \left(\frac{2m-1}{2b} \pi \right)}{\left(\frac{2m-1}{2b} \pi \right)^2 - (n\pi)^2} \cos(n\pi b), & n \neq \frac{2m-1}{2b}; \\ \frac{b}{2}, & n = \frac{2m-1}{2b}. \end{cases}$$

В свою очередь, на основании (12), (21) и (226) можно записать

$$\frac{U_{00}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n0} \cos(n\pi x) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{m0} \cos\left(\frac{2m-1}{2b}\right) \pi x. \quad (25)$$

Умножая обе части (25) на $2/b \cos(i\pi x) dx$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) и интегрируя по x правую часть в пределах от 0 до b и левую часть, учитывая (2а), в пределах от 0 до 1, найдем

$$U_{i0} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} V_{m0} C_{m,i}, \quad (26)$$

где

$$C_{m,i} = \begin{cases} \frac{(-1)^{m-1} \left(\frac{2m-1}{2b} \pi \right)}{\left(\frac{2m-1}{2b} \pi \right)^2 - (i\pi)^2} \cos(i\pi b), & i \neq \frac{2m-1}{2b}; \\ \frac{b}{2}, & i = \frac{2m-1}{2b}. \end{cases}$$

Подставляя (24) в (26), окончательно имеем

$$U_{i0} = \frac{16b}{\delta\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} C_{m,i} - U_{00} \frac{8b}{\delta\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} C_{m,i} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 8nU_{n0} \operatorname{cth}(n\pi\delta) \frac{1}{2m-1} C_{m,i} C_{m,n}. \quad (27)$$

Полагая здесь поочередно $i = 0, 1, 2, \dots$, получим бесконечную систему уравнений. Решив ее и определив коэффициенты $U_{00}, U_{10}, U_{20}, \dots$, по (12) можно определить распределение магнитного потенциала в воздушном зазоре на любом уровне от поверхности головок зубцов.

Гармоники удельной магнитной проводимости зазора

Магнитная проводимость зазора определяется составляющей магнитной индукции по оси y

$$B_y = -\mu_0 \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}.$$

Поэтому на основании (12)

$$B_y = \mu_0 \left(\frac{2 - U_{00}}{2\delta} - \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi) U_{n0} \frac{\operatorname{ch} n\pi(y+\delta)}{\operatorname{sh} n\pi\delta} \cos(n\pi x) \right). \quad (28)$$

Из (28) следует, что гармоники индукции изменяются по высоте зазора согласно закону гиперболического косинуса.

Магнитная индукция в любой точке зазора определяется выражением

$$B(x, y) = \Lambda(x, y) F(x) = \frac{\mu_0}{\delta} \lambda(x, y) F(x), \quad (29)$$

где $\Lambda(x, y)$ — удельная магнитная проводимость воздушного зазора; $\lambda(x, y)$ — относительная удельная магнитная проводимость воздушного зазора; $F(x)$ — магнитодвижущая сила, действующая вдоль зазора и равная в данном случае единице.

Согласно (28) и (29) получим, что

$$\lambda(x, y) = \lambda_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(y) \cos(n\pi x), \quad (30)$$

где постоянная составляющая относительной проводимости зазора

$$\lambda_0 = \frac{2 - U_{00}}{2} \quad (31)$$

и амплитуда гармоники относительной проводимости зазора

$$\lambda_n(y) = (n\pi\delta) U_{n0} \frac{\text{ch } n\pi(y+\delta)}{\text{sh } n\pi\delta}. \quad (32)$$

Разделив (30) на (31), получим выражение для амплитуд гармоник проводимости, отнесенных к постоянной составляющей проводимости зазора,

$$\lambda_{cn}(y) = \frac{2n\pi\delta U_{n0}}{2 - U_{00}} \frac{\text{ch } n\pi(y+\delta)}{\text{sh } n\pi\delta}. \quad (33)$$

Полагая в (33) $y = -\delta$ и $y = 0$, получим значения амплитуд гармоник проводимости соответственно на гладкой и на зубчатой поверхностях зазора

$$\lambda_{pcn} = \frac{2n\pi\delta U_{n0}}{2 - U_{00}} \frac{1}{\text{sh}(n\pi\delta)}, \quad (34)$$

$$\lambda_{zcn} = \frac{2n\pi\delta U_{n0}}{2 - U_{00}} \text{cth}(n\pi\delta). \quad (35)$$

На любой промежуточной поверхности зазора имеем

$$\lambda_{cn}(y) = \lambda_{pcn} \text{ch } n\pi(y+\delta) = \lambda_{zcn} \frac{\text{ch } n\pi(y+\delta)}{\text{ch } n\pi\delta}. \quad (36)$$

Из (36) следует, что для определения $\lambda_{cn}(y)$ при любом $-\delta < y < 0$ необходимо иметь либо значение λ_{pcn} , либо значение λ_{zcn} . Кривые λ_{zcn} приведены в [3], однако определение по ним малых значений λ_{pcn} связано с неточностью тем большей, чем больше множители $\text{ch } n\pi(y+\delta)$. Поэтому целесообразно иметь также кривые величин λ_{zcn} . Эти кривые были рассчитаны с помощью ЭВМ «Минск-22» путем решения системы из 20 уравнений (27) и последующего использования выражений (31) и (35).

Кривые λ_0 и λ_{zcn} приведены на рис. 2—6. При полузакрытых и полуоткрытых пазах под b_{π} следует понимать величину открытия паза.

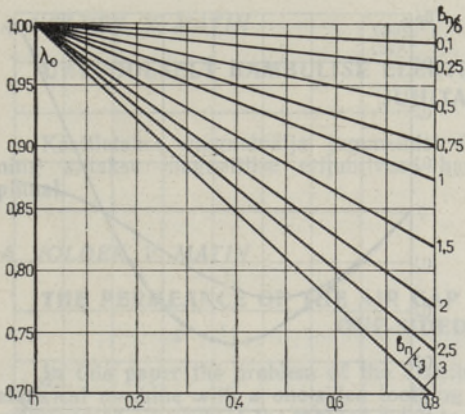


Рис. 2. Постоянная составляющая проводимости зазора.

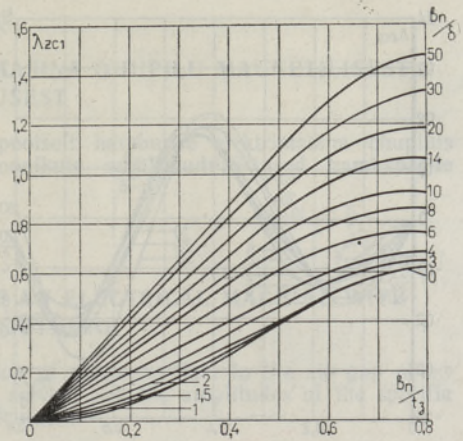


Рис. 3. Амплитуда первой гармоники проводимости зазора на зубчатой поверхности.

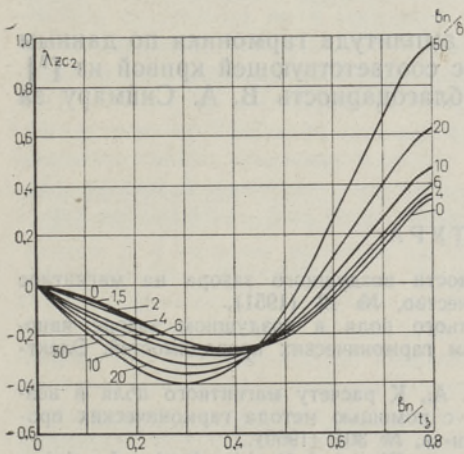


Рис. 4. Амплитуда второй гармоники проводимости зазора на зубчатой поверхности.

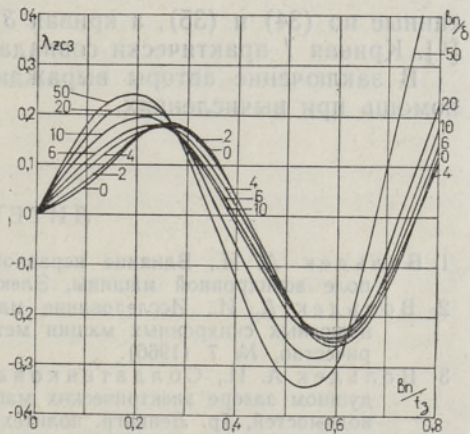


Рис. 5. Амплитуда третьей гармоники проводимости зазора на зубчатой поверхности.

Постоянная составляющая проводимости λ_0 постоянна в любой точке зазора, поэтому для ее определения можно воспользоваться кривыми из работы [3]. На рис. 2 приведены только значения λ_0 для относительно больших зазоров.

Сравнение кривых λ_{zcn} рис. 3—6 и кривых λ_{pcn} рис. 1 из [3] показывает, что формы их несколько различаются. Различие между амплитудами гармоник проводимости растет с увеличением порядка гармоники, высоты зазора и ширины паза. Кроме того, при увеличении зазора величина λ_{zcn} стремится к конечному значению, что согласуется с физическими представлениями о характере поля в воздушном зазоре. Точность определения амплитуд гармоник проводимости (особенно высоких порядков) при помощи λ_{zcn} на гладкой поверхности увеличивается.

На рис. 7 для сравнения приведены кривые амплитуды второй гармоники проводимости для $b_{п}/\delta = 4$, причем кривые 1 и 2 — амплитуды гармоники на гладкой и зубчатой поверхностях соответственно, рассчи-

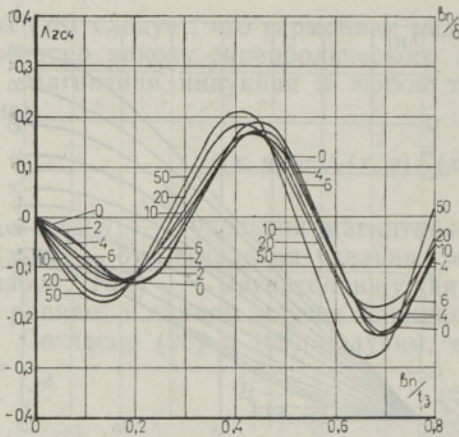


Рис. 6. Амплитуда четвертой гармоники проводимости зазора на зубчатой поверхности.

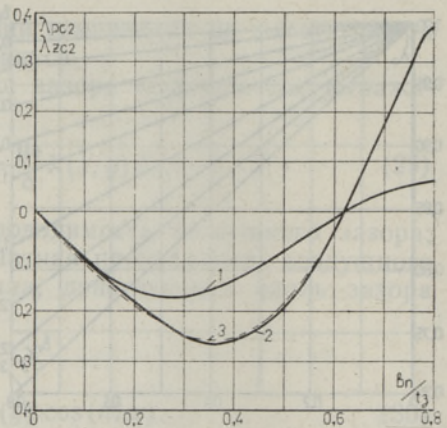


Рис. 7. Сравнение амплитуд гармоник проводимости зазора.

танные по (34) и (35), а кривая 3 — амплитуда гармоники по данным [6]. Кривая 1 практически совпадает с соответствующей кривой из [3].

В заключение авторы выражают благодарность В. А. Сиймару за помощь при вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольдек А. И., Влияние неравномерности воздушного зазора на магнитное поле асинхронной машины, *Электричество*, № 12 (1951).
2. Вольдек А. И., Исследование магнитного поля в воздушном зазоре явнополюсных синхронных машин методом гармонических проводимостей, *Электричество*, № 7 (1966).
3. Вольдек А. И., Солдатенкова Н. А., К расчету магнитного поля в воздушном зазоре электрических машин с помощью метода гармонических проводимостей, *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*, № 301 (1969).
4. Сое R. T., Taylor H. W., Some Problems in Electrical Machine Design Involving Elliptic Functions, *Philos. Mag.*, 6 (1928).
5. Вольдек А. И., Лахтметс Р. А., Расчет магнитной проводимости воздушного зазора электрических машин, *Электротехника*, № 9 (1969).
6. Лахтметс Р. А., Исследование магнитных полей в синхронных машинах методом удельной магнитной проводимости воздушного зазора, *Дисс. кандид. техн. н.*, Ленингр. политехн. ин-т, 1969.
7. Важнов А. И., Суханов В. В., Гармоники магнитного поля в зазоре электрической машины, обусловленные односторонней зубчатостью, *Изв. АН СССР, Сер. Энергетика и транспорт*, № 6 (1971).
8. Зечихин Б. С., Магнитное поле в зазоре индукторной машины в режиме холостого хода, *Электромеханика*, № 1 (1960).
9. Гринберг Г. А., *Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений*, М., 1948.
10. Иванов-Смоленский А. В., Мнацаканян М. С., Аналитический метод расчета магнитного поля в воздушном зазоре электрических машин с односторонней зубчатостью, *Электричество*, № 3 (1972).

Ленинградский политехнический институт

Поступила в редакцию
10/XI 1972

A. VOLDEK, V. MATIN

ÜHEPOOLSELT HAMBULISE ELEKTRIMASINA ÕHUPILU MAGNETILISEST JUHITAVUSEST

Käsitletakse magnetvälja jagunemist ühepoolselt hambulise elektrimasina õhupilus ning antakse magnetilise erijuhtivuse harmoonikute amplituudväärtused hambapeade pinnal.

A. VOLDEK, V. MATIN

THE PERMEANCE OF THE AIR GAP OF AN ELECTRICAL MACHINE WITH ONE-SIDED TOOTHING

In this paper the problem of the distribution of magnetic field in the air gap of an electrical machine with a one-sided toothing is solved, and the amplitudes of the specific permeance harmonics at the toothed side are calculated.