

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.2.04>

УДК 621.375.82

Ю. УДЕР

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ТЕОРИЯ ГОЛОГРАММ ФРЕНЕЛЯ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Задача дифракции света на голограмме в общих случаях решается методами скалярной теории света [1]. Только в сравнительно простом случае, когда голограмма представляет собой интерферограмму двух плоских волн, эта задача решена в рамках электромагнитной теории света [2, 3].

Целью настоящей работы является электродинамическое описание процесса восстановления, т. е. вычисление электромагнитной волны, выходящей из голограммы, в случае падения на нее плоской световой волны. При этом мы рассмотрим случай объемной голограммы Френеля в виде бесконечной плоскопараллельной пластинки, диэлектрическая проницаемость которой зависит от пространственных координат  $x, y, z$  следующим образом [2-4]:

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(x, y, z), \quad (1)$$

где  $\varepsilon_1$  — произвольная функция пространственных координат, которая в каждой точке пространства удовлетворяет неравенству [2]

$$|\varepsilon_1| \ll |\varepsilon_0|. \quad (2)$$

Кроме того, предположим, что функция  $\varepsilon_1$  на границе голограммы претерпевает разрыв, а внутри голограммы она непрерывна и пространственная частота изменения ее не превышает значения волнового числа в среде с показателем преломления  $\varepsilon_0^{1/2}$ , так что справедливо неравенство

$$\left| \frac{\text{grad } \varepsilon}{\varepsilon} \right| \ll \left| \frac{\varkappa \varepsilon_1}{\varepsilon_0} \right|, \quad (3)$$

где  $\varkappa = 2\pi\varepsilon_0^{1/2}/\lambda$ , а  $\lambda$  — длина волны света в вакууме.

Для переменной части диэлектрической проницаемости голограммы используем выражение [4]

$$\varepsilon_1 = c(\mathbf{E}_r^* \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_r \mathbf{E}_o^*), \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}_o$  и  $\mathbf{E}_r$  — комплексные амплитуды электрического поля соответственно в объектном и опорном пучках света в процессе получения голограммы, а  $c$  — постоянная. В первом приближении теории возмущений величина  $c$  войдет в состав общего множителя в выражении для дифрагированной волны. Поскольку в этом приближении интерес представляет только относительное распределение поля, а не его абсолютная величина, точное значение величины  $c$  нас интересовать не будет.



После освещения светочувствительного слоя (с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ) опорным и объектным пучками света (с длиной волны  $l$ ), слой обычно подвергается процессу обработки. Поэтому комплексная диэлектрическая проницаемость готовой голограммы  $\epsilon_0$  не всегда совпадает с ее значением  $\epsilon$  для светочувствительного слоя [5]. В дальнейшем это обстоятельство будем иметь в виду.

### 1. Поле рассеянной волны в первом приближении теории возмущений

Электромагнитное поле в голограмме описывается уравнениями Максвелла. Эти уравнения будут удовлетворяться, если потенциалы поля в случае монохроматического поля подчинить условиям [5]

$$\varphi = \frac{i}{\kappa_0 \epsilon} \operatorname{div} \mathbf{A}, \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{A} + \epsilon \kappa_0^2 \mathbf{A} - \frac{\operatorname{grad} \epsilon}{\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (6)$$

где  $\kappa_0 = 2\pi/\lambda$ , а магнитная проницаемость среды взята равной единице. Напряженности магнитного ( $\mathbf{H}$ ) и электрического ( $\mathbf{E}$ ) поля выражаются при этом по формулам

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (7)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{i}{\kappa_0 \epsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (8)$$

Поскольку диэлектрическая проницаемость голограммы изменяется от точки к точке незначительно (см. предположение (2)), то распространение волн в голограмме в нулевом приближении происходит так же, как в однородной среде. То есть главная часть электромагнитной энергии распространяется прямолинейно, и только сравнительно небольшая ее доля рассеивается. Опираясь на принцип суперпозиции электромагнитных волн, разделим комплексную амплитуду векторного потенциала на две части

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1, \quad (9)$$

где  $\mathbf{A}_0$  представляет поле волны, распространяющейся по законам геометрической оптики в среде с показателем преломления  $\epsilon^{1/2}_0$ , а  $\mathbf{A}_1$  — поле рассеянной волны. Поскольку рассеивается небольшая часть волны, то в каждой точке голограммы модули этих величин удовлетворяют неравенству

$$|\mathbf{A}_1| \ll |\mathbf{A}_0|. \quad (10)$$

Кроме того, очевидно, что  $\mathbf{A}_0$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{A}_0 + \kappa^2 \mathbf{A}_0 = 0. \quad (11)$$

Подставляя выражения (1) и (9) в (6) и учитывая (11), находим для  $\mathbf{A}_1$  следующее дифференциальное уравнение:

$$\Delta \mathbf{A}_1 + \kappa^2 \mathbf{A}_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \kappa^2 \mathbf{A}_0 - \frac{\operatorname{grad} \epsilon}{\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{A}_0 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \kappa^2 \mathbf{A}_1 - \frac{\operatorname{grad} \epsilon}{\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{A}_1 = 0. \quad (12)$$

В этом уравнении модули двух последних членов малы по сравнению с модулями первых четырех. Поэтому в первом приближении их можно отбросить. Такое упрощение обосновывается неравенствами (2), (3), (10) и оценкой  $|\operatorname{div} \mathbf{A}_1| \ll |\kappa \mathbf{A}_1|$ . При упрощениях такого порядка множи-



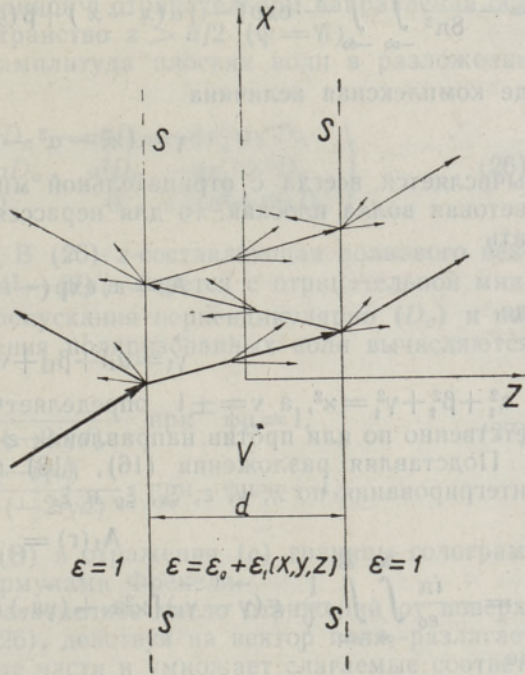
тель  $\text{grad } \epsilon/\epsilon$  в четвертом члене уравнения (12) можно переписать в виде  $\text{grad } \epsilon_1/\epsilon_0$ . В результате получим

$$\Delta \mathbf{A}_1 + \kappa^2 \mathbf{A}_1 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \kappa^2 \mathbf{A}_0 + \frac{\text{grad } \epsilon_1}{\epsilon_0} \text{div } \mathbf{A}_0. \quad (13)$$

Рис. 1. Отражение и рассеяние волн в плоскопараллельной голограмме. Координатная ось  $y$  направлена перпендикулярно плоскости рисунка.

Рассмотрим сперва рассеяние в пространстве, где область  $V$  (рис. 1) заполняется голограммой в виде бесконечной плоскопараллельной пластинки толщиной  $d$ , а показатель преломления остальной части пространства имеет значение  $\epsilon_0^{1/2}$ . В этом случае отражения от границы голограммы  $S$  не наблюдается.

Пусть на область  $V$  падает электромагнитная волна  $\mathbf{A}_0$ . Из (13) можем тогда определить поле рассеянной волны. Частным решением уравнения (13) является интеграл [7]



$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -\int_V G_V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (14)$$

где  $\mathbf{F}$  — свободный член уравнения (13) и  $G_V$  — функция Грина для пространства  $V$ .

Поскольку вне голограммы  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$  (рис. 1), а отражениями от границы  $S$  на время пренебрегаем, в (14) можно интегрировать по всему пространству. В этом случае функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-i\kappa|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (15)$$

где  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$ .

Обозначим фурье-образ переменной части диэлектрической проницаемости среды через  $g(\vec{\xi})$  так, что

$$\epsilon_1(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vec{\xi}) \exp(-i\vec{\xi}\mathbf{r}) d\vec{\xi} \quad (16)$$

и

$$g(\vec{\xi}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-d/2}^{d/2} \epsilon_1(\mathbf{r}) \exp(i\vec{\xi}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (17)$$



где  $\vec{\xi} = \xi_x \mathbf{i} + \xi_y \mathbf{j} + \xi_z \mathbf{k}$  и  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , а  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  — орты  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -оси декартовой координатной системы. Для функции Грина применим разложение [6]

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{i}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \cdot \exp\{-i[\alpha(x-x') + \beta(y-y') + \gamma(z-z')]\} d\alpha d\beta, \quad (18)$$

где комплексная величина

$$\gamma = (\kappa^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (19)$$

вычисляется всегда с отрицательной мнимой частью. Если падающая световая волна плоская, то для нерассеянной части поля можем написать

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{a}_v \exp(-i\vec{\gamma}_1 \mathbf{r}), \quad (20)$$

где

$$\vec{\gamma}_1 = \alpha_1 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j} + \nu \gamma_1 \mathbf{k} \quad (21)$$

и  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \nu^2 \gamma_1^2 = \kappa^2$ , а  $\nu = \pm 1$  определяет случаи распространения соответственно по или против направления  $z$ -оси (см. рис. 1).

Подставляя разложения (16), (18) и (20) в (14), получим после интегрирования по  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\xi_x$ ,  $\xi_y$  и  $\xi_z$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = -\frac{i\pi}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} \cdot g(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1) [\kappa^2 \mathbf{a}_v + (\vec{\gamma} \mathbf{a}_v) (\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1)] \exp(-i\vec{\gamma} \mathbf{r}) d\alpha d\beta, \quad (22)$$

где

$$\vec{\gamma} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \mu \gamma \mathbf{k}, \quad (23)$$

и

$$\mu = \begin{cases} +1 & \text{при } \frac{d}{2} \leq z < \infty, \\ -1 & \text{при } -\infty < z \leq -\frac{d}{2}. \end{cases} \quad (24)$$

При  $\mu = 1$  выражение (22) задает поле, рассеянное в положительном, а при  $\mu = -1$  — в отрицательном направлениях оси  $z$ .

Подставляя (22) в (8), получим для напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{i\pi}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} g(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1) [\kappa^2 \mathbf{e}_v - (\vec{\gamma} \mathbf{e}_v) \vec{\gamma}] \exp(-i\vec{\gamma} \mathbf{r}) d\alpha d\beta, \quad (25)$$

где  $\mathbf{e}_v$  — амплитуда напряженности электрического поля в первичной волне (20).

Теперь можно перейти к более реальному случаю, когда диэлектрическая проницаемость голограммы отличается от диэлектрической проницаемости окружающей среды (см. рис. 1). В этом случае плоские волны (20) и (25) частично отражаются от поверхности голограммы и преломляются при выходе из нее, причем коэффициенты отражения и преломления зависят от состояния поляризации волны. Не будем учитывать дальнейшее рассеяние волны (25) в голограмме, поскольку это



соответствовало бы приближению более высокого порядка. То есть дальнейшее распространение волн (25), отраженных от внутренних поверхностей голограммы, рассмотрим в среде с показателем преломления  $\epsilon_0^{1/2}$ .

Из-за явления отражения часть волны, рассеянной в положительном направлении оси  $z$  ( $\mu = 1$ ), переходит в пространство  $z < -d/2$  ( $\psi = -1$ ), а часть волны, рассеянной в отрицательном направлении оси  $z$  ( $\mu = -1$ ), переходит в пространство  $z > d/2$  ( $\psi = 1$ ).

Учитывая сказанное выше, амплитуда плоских волн в разложении (25) умножается на матрицу

$$M_{\psi\mu} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \beta^2 D_\sigma & -\alpha\beta D_\sigma & -\psi \epsilon_0^{1/2} \alpha \gamma^0 D_\pi \\ -\beta\alpha D_\sigma & \alpha^2 D_\sigma & -\psi \epsilon_0^{1/2} \beta \gamma^0 D_\pi \\ 0 & 0 & \epsilon_0^{1/2} (\alpha^2 + \beta^2) D_\pi \end{pmatrix} \quad (26)$$

и суммируется по значениям  $\mu$ . В (26)  $z$ -составляющая волнового вектора плоской волны  $\gamma^0 = (\kappa_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$  берется с отрицательной мнимой частью и коэффициенты пропускания перпендикулярно ( $D_\sigma$ ) и параллельно ( $D_\pi$ ) плоскости падения поляризованных волн вычисляются по схеме

$$D = \begin{cases} \frac{\Theta}{1 - \rho^2 \exp(-2i\gamma d)} & \text{при } \psi\mu = 1, \\ \frac{\Theta \rho \exp(-i\gamma d)}{1 - \rho^2 \exp(-2i\gamma d)} & \text{при } \psi\mu = -1, \end{cases} \quad (27)$$

где коэффициент пропускания ( $\Theta$ ) и отражения ( $\rho$ ) границы голограмма  $\rightarrow$  воздух определяются формулами Френеля.

Формулы (27) учитывают бесконечное число отражений от поверхностей голограммы. Матрица (26), действуя на вектор поля, разлагает вектор на  $\sigma$ - и  $\pi$ -поляризованные части и умножает слагаемые соответственно на  $D_\sigma$  и  $D_\pi$ . Матрица учитывает также изменение направления распространения плоской волны при выходе из голограммы.

Если мы учли отражения рассеянной волны от поверхностей голограммы, то тем более нужно учитывать эти отражения у падающей световой волны (см. рис. 1). В этом случае вместо  $e_v$  в (25) подставляем

$$e_v \rightarrow \sum_{\chi} N_{\nu\chi} e_\chi, \quad (28)$$

где  $e_\chi$  — амплитуда опорной световой волны в воздухе, распространяющаяся при  $\chi = 1$  в положительном, а при  $\chi = -1$  — в отрицательном направлении  $z$ -оси. В (28) элементы матрицы  $N_{\nu\chi}$  вычисляются аналогично элементам матрицы (26), где только заменяются  $\mu \rightarrow \nu$ ,  $\psi \rightarrow \chi$ ,  $\epsilon_0^{1/2} \rightarrow \epsilon_0^{-1/2}$ ,  $\alpha \rightarrow \alpha_1$ ,  $\beta \rightarrow \beta_1$  и  $\gamma^0 \rightarrow \gamma_1$ , а в (27) берутся соответствующие коэффициенты отражения и пропускания.

Все эти дополнения приводят выражение (25) к виду

$$E_1(\mathbf{r}) = \frac{i\pi}{\epsilon_0} \sum_{\mu, \nu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma} g(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1) M_{\psi\mu} [\kappa^2 N_{\nu\chi} e_\chi - (\vec{\gamma} N_{\nu\chi} e_\chi) \vec{\gamma}] \times \\ \times \exp \left\{ -i \left[ \alpha x + \beta y + \gamma \frac{d}{2} + \gamma^0 \left( |z| - \frac{d}{2} \right) \right] \right\} d\alpha d\beta. \quad (29)$$

Изменения в экспоненте учитывают то обстоятельство, что  $z$ -составляющая волнового вектора рассеянных волн в голограмме имеет значение  $\gamma$ , а в воздухе  $-\gamma^0$ .



## 2. Основные свойства голограмм

Пусть в процессе получения голограммы фотопластина освещается плоской опорной волной

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_v \exp(-i\vec{\theta}_1^0 \mathbf{r}) \quad (30)$$

и объектным пучком

$$\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}_u(\xi, \eta) \exp(-i\vec{\theta}^0 \mathbf{r}) d\xi d\eta, \quad (31)$$

где  $\vec{\theta}_1^0 = \xi_1 \mathbf{i} + \eta_1 \mathbf{j} + v\theta_1^0 \mathbf{k}$ ,  $\vec{\theta}^0 = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + u\theta^0 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}_v \vec{\theta}_1^0 = 0$ ,  $\mathbf{e}_u \vec{\theta}^0 = 0$ ,  $\xi_1^2 + \eta_1^2 + (\theta_1^0)^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\theta^0)^2 = k_0^2$  и  $k_0 = 2\pi/l$ , а  $v = \pm 1$  и  $u = \pm 1$  определяют

направления распространения по или против направления  $z$ -оси.

Волны (30) и (31) при переходе в регистрирующую среду претерпевают преломление и многократно отражаются от ее гладких поверхностей. Для волн в среде получим

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = \sum_n N_{nv} \mathbf{e}_v \exp(-i\vec{\theta}_1 \mathbf{r}), \quad (32)$$

$$\mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_{mu} \mathbf{e}_u(\xi, \eta) \exp\left[-i\vec{\theta} \mathbf{r} - i \frac{d}{2} (\theta - \theta^0)\right] d\xi d\eta, \quad (33)$$

где  $n = \pm 1$  и  $m = \pm 1$  определяют направления распространения по или против направления  $z$ -оси,  $\vec{\theta}_1 = \xi_1 \mathbf{i} + \eta_1 \mathbf{j} + n\theta_1 \mathbf{k}$ ,  $\vec{\theta} = \xi \mathbf{i} + \eta \mathbf{j} + m\theta \mathbf{k}$ ,  $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \theta_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \theta^2 = k_0^2 e$ , а матрицы  $N_{nv}$  и  $N_{mu}$  вычисляются по схемам (26) и (27), где  $\epsilon_0^{1/2}$  заменяется на  $e^{-1/2}$  в (26), а коэффициенты пропускания и отражения в (27) определяются при угле падения соответствующих плоских волн (30) и (31).

Подставим выражение (32) и (33) в (4), а полученное выражение — в (17). После интегрирований по  $x$ ,  $y$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $z$  имеем

$$g(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = \frac{c}{\pi} \sum_{n,m} [Q(\xi_x, \xi_y, \xi_z) + Q^*(-\xi_x, -\xi_y, -\xi_z)], \quad (34)$$

где

$$Q(\xi_x, \xi_y, \xi_z) = q(\xi_x + \xi_1, \xi_y + \eta_1) \cdot \frac{\sin\left\{\frac{d}{2} [\xi_z + \zeta(\xi_x + \xi_1, \xi_y + \eta_1)]\right\}}{\xi_z + \zeta(\xi_x + \xi_1, \xi_y + \eta_1)}, \quad (35)$$

$$q(\xi, \eta) = (N_{nv}^* \mathbf{e}_v^*) N_{mu} \mathbf{e}_u(\xi, \eta) \exp\left[-i \frac{d}{2} (\theta - \theta^0)\right], \quad (36)$$

$$\zeta(\xi, \eta) = n\theta_1^* - m\theta. \quad (37)$$

Из (29) видно, что плоская волна с волновым вектором  $\vec{\gamma}$  получается после рассеяния опорной волны  $\vec{\gamma}_1$  на пространственной синусоидально-слоистой решетке с вектором решетки  $\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1$ . С другой стороны, из (34) — (37) следует, что такая решетка получается в результате интерференции плоских волн с волновыми векторами



$$\vec{\vartheta}_1^* + \vec{\gamma}_0 = (\alpha - \alpha_1 + \xi_1)\mathbf{i} + (\beta - \beta_1 + \eta_1)\mathbf{j} + m[ek_0^2 - (\alpha - \alpha_1 + \xi_1)^2 - (\beta - \beta_1 + \eta_1)^2]^{1/2}\mathbf{k} \quad (38)$$

в случае мнимого изображения и с векторами

$$\vec{\vartheta}_1 + \vec{\gamma}_0^* = (-\alpha + \alpha_1 + \xi_1)\mathbf{i} + (-\beta + \beta_1 + \eta_1)\mathbf{j} + m\{[ek_0^2 - (\alpha - \alpha_1 - \xi_1)^2 - (\beta - \beta_1 - \eta_1)^2]^{1/2}\}^*\mathbf{k} \quad (39)$$

в случае действительного изображения. Следовательно, должно быть

$$\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1 = \begin{cases} \vec{\gamma}_0 - \vec{\vartheta}_1^* & \text{для мнимого изображения,} \\ \vec{\vartheta}_1 - \vec{\gamma}_0^* & \text{для действительного изображения.} \end{cases} \quad (40)$$

Последнее равенство выполняется, если

$$\omega = \nu\gamma_1 - n\vartheta_1^* - \mu\gamma + m[ek_0^2 - (\alpha - \alpha_1 + \xi_1)^2 - (\beta - \beta_1 + \eta_1)^2]^{1/2} = 0, \quad (41)$$

$$\omega' = \nu\gamma_1 + n\vartheta_1 - \mu\gamma - m\{[ek_0^2 - (\alpha - \alpha_1 - \xi_1)^2 - (\beta - \beta_1 - \eta_1)^2]^{1/2}\}^* = 0.$$

Соотношения (40) в векторной форме выражают условие отражения Вульфа—Брегга [9]. Поскольку выражения (41) определяют аргументы  $\sin \omega/\omega$  функций в (35), то условие (41) является не только условием отражения Вульфа—Брегга, но и условием для максимальной восстанавливаемой амплитуды поля.

Из (29) видно, что фурье-образ (34) вычисляется там при аргументах  $\alpha - \alpha_1$ ,  $\beta - \beta_1$ ,  $\mu\gamma - \nu\gamma_1$ , что приводит к условиям

$$\alpha_1 = \pm \xi_1, \quad \beta_1 = \pm \eta_1 \quad (42)$$

для правильного восстановления фурье-спектра исходной объектной волны (31), так как в конечном счете фурье-образ  $e_u(\xi, \eta)$  задается в (29) значениями аргументов  $\pm \alpha \mp \alpha_1 + \xi_1$  и  $\pm \beta \mp \beta_1 + \eta_1$ . Верхние знаки соответствуют первому члену в (34), т. е. мнимому изображению, а нижние — второму, т. е. действительному изображению. При таких условиях из (34) получим

$$g(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1) = \frac{c}{\pi} \sum_{n,m} \left[ q(\alpha, \beta) \frac{\sin\left(\frac{d}{2}\omega\right)}{\omega} + q^*(\alpha, \beta) \frac{\sin\left(\frac{d}{2}\omega'\right)}{\omega'} \right]. \quad (43)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \omega &= \nu\gamma_1 - n\vartheta_1^* - \mu\gamma + m\vartheta, \\ \omega' &= \nu\gamma_1 + n\vartheta_1 - \mu\gamma - m\vartheta^*, \end{aligned} \quad (44)$$

а z-составляющие волновых векторов определяются по следующим формулам:

$$\text{для опорной волны} \quad \begin{cases} \vartheta_1 = (ek_0^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2)^{1/2} & \text{при записи,} \\ \gamma_1 = (\epsilon_0\kappa_0^2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2)^{1/2} & \text{при считывании;} \end{cases} \quad (45)$$

$$\text{для объектной волны} \quad \begin{cases} \vartheta = (ek_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2} & \text{при записи,} \\ \gamma = (\epsilon_0\kappa_0^2 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2} & \text{при считывании,} \end{cases} \quad (46)$$



где значения квадратных корней вычисляются с отрицательными мнимыми частями.

Из (43) следуют дополнительные условия к условиям (42) для проведения процесса восстановления. Амплитуды всех плоских волн в угловом спектре объектной волны (31) будут восстанавливаться в одинаковой степени, если  $\omega = \omega' = 0$  для всех этих волн, т. е. если

$$v\gamma_1 = n\theta_1^*, \quad \mu\gamma = m\theta \quad \text{в случае мнимого изображения,} \quad (47)$$

$$v\gamma_1 = -n\theta_1, \quad \mu\gamma = -m\theta^* \quad \text{в случае действительного изображения.} \quad (48)$$

Отсюда вытекает известное свойство толстых голограмм — восстанавливать только одно изображение предмета [8], так как условия (47) и (48) не могут быть выполнены одновременно. Когда  $d \rightarrow 0$ , это свойство голограмм исчезает. Из (48) следует, что для успешного восстановления действительного изображения голограмма должна в процессе считывания освещаться с противоположной стороны по сравнению с направлением освещения в процессе записи [8] (т. е.  $n = -v$ ,  $m = -\mu$ ).

Условия (47) и (48) не могут быть выполнены точно, если в среде наблюдается поглощение света или если  $k \neq k$ . В случае же отсутствия поглощения (48) не выполняется одновременно для однородных и неоднородных плоских волн в разложении (31). Следовательно, условия отражения Вульфа—Брегга выполняются не всегда.

Интересно выяснить, как выражаются «коэффициенты вульф-брегговского отражения»? Волна с амплитудой  $e_v$  и волновым вектором  $\vec{\gamma}_1$  падает на синусоидальнослоистую решетку, пространственная ориентация которой определяется вектором  $\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1$ , перпендикулярным к этим слоям. Как видно из (29), отраженная волна обладает волновым вектором  $\vec{\gamma}$  и амплитудой

$$\frac{i\pi}{\epsilon_0} \frac{1}{\gamma} g(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1) [\chi^2 e_v - (\vec{\gamma} e_v) \vec{\gamma}] da d\beta.$$

При помощи элементарных действий векторной алгебры для коэффициента отражения получим

$$B_\sigma = \frac{i\pi}{\epsilon_0} \frac{\chi^2}{\gamma} g(\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_1) da d\beta, \quad (49)$$

$$B_\pi = \frac{\gamma \gamma_1}{\chi^2} B_\sigma,$$

где индексы  $\sigma$  и  $\pi$  обозначают соответственно случаи поляризации перпендикулярно и параллельно плоскости падения (плоскость, в которой находятся векторы  $\vec{\gamma}_1$  и  $\vec{\gamma}$ ).  $B_\sigma$  и  $B_\pi$  отличаются друг от друга множителем, определяющим перпендикулярную проекцию амплитуды падающей волны на направление распространения отраженной волны.

### 3. Восстановление плоских световых волн

Пусть объектная волна (31) является плоской,  $x$ - и  $y$ -компоненты волнового вектора которой мы обозначим через  $\xi_2$  и  $\eta_2$ . Тогда

$$e_u(\xi, \eta) = e'_u \delta(\xi - \xi_2) \delta(\eta - \eta_2), \quad (50)$$



где  $e'_u$  — амплитуда плоской волны, а  $\delta(\xi)$  — дельта-функция Дирака. Из (29) при помощи (50) и (34)–(37) определим поле восстановленной плоской волны

$$E(\mathbf{r}) = \frac{ic}{\epsilon_0} \sum_{n,m,v,\mu} \left[ \frac{\sin\left(\frac{d}{2}\omega\right)}{\omega} q(\xi_2, \eta_2) P(\alpha_2, \beta_2) + \frac{\sin\left(\frac{d}{2}\omega'\right)}{\omega'} q^*(-\xi_2, -\eta_2) P(\alpha_2, \beta_2) \right], \quad (51)$$

где

$$\omega = v\gamma_1 - n\theta_1^* - \mu[\epsilon_0\kappa_0^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2]^{1/2} + m[ek_0^2 - \xi_2^2 - \eta_2^2]^{1/2}, \quad (52)$$

$$\omega' = v\gamma_1 + n\theta_1 - \mu[\epsilon_0\kappa_0^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2]^{1/2} - m\{[ek_0^2 - \xi_2^2 - \eta_2^2]^{1/2}\}^*,$$

$$q(\xi, \eta) = (N_{nv}^* e_{nv}^*) N_{mu} e'_{u} \exp\left[-i\frac{d}{2}(\theta - \theta^0)\right], \quad (53)$$

$$P(\alpha, \beta) = \frac{1}{\gamma} M_{\psi\mu} [\kappa^2 N_{\nu\chi} e_{\chi} - (\vec{\gamma} N_{\nu\chi} e_{\chi}) \vec{\gamma}] \times \times \exp\left\{-i\left[\alpha x + \beta y + \gamma\frac{d}{2} + \gamma^0\left(|z| - \frac{d}{2}\right)\right]\right\}, \quad (54)$$

а  $\alpha_2 = \alpha_1 \mp \xi_1 \pm \xi_2$  и  $\beta_2 = \beta_1 \mp \eta_1 \pm \eta_2$  —  $x$ - и  $y$ -компоненты волнового вектора восстановленной плоской волны

$$\vec{\alpha}_2 = \alpha_2 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \psi[\kappa_0^2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2]^{1/2} \mathbf{k}. \quad (55)$$

Выражение (51) содержит три множителя под знаком суммирования. Один из них, множитель (53), зависит только от параметров процесса получения голограммы, а другой, множитель (54), содержит только характеристики процесса считывания. Функция  $\sin(d\omega/2)/\omega$  и выражения для  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  связывают характеристики этих двух ступеней процесса восстановления. При суммировании по всевозможным направлениям распространения в голограмме — по значениям величин  $v, n, \mu$  и  $m$  — больше всего изменяется множитель  $\sin(d\omega/2)/\omega$ . Если изобразить значения этой функции на комплексной плоскости, то нетрудно увидеть, что модуль функции имеет максимальные значения при

$$v = n, \mu = m \text{ в случае мнимого изображения,} \quad (56)$$

$$v = -n, \mu = -m \text{ в случае действительного изображения.}$$

Из этих четырех членов в сумме (51) наибольшим будет тот, в котором направления распространения волн внутри голограммы ( $n, m, v, \mu$ ) больше всего совпадают с направлениями распространения вне голограммы ( $v, u, \chi, \psi$ ), т. е. в выражениях матричных элементов (27) которой меньше всего встречаются коэффициенты отражения в числителе. Если направления распространения вне голограммы также удовлетворяют соотношениям (56), то в случае  $v = u = \pm 1$  ( $\chi = v, \psi = u$ ) происходит восстановление по схеме Габора или Лейта—Упатника [1], а в случае  $v = -u = \pm 1$  ( $\chi = -v, \psi = -u$ ) — по схеме Денисюка



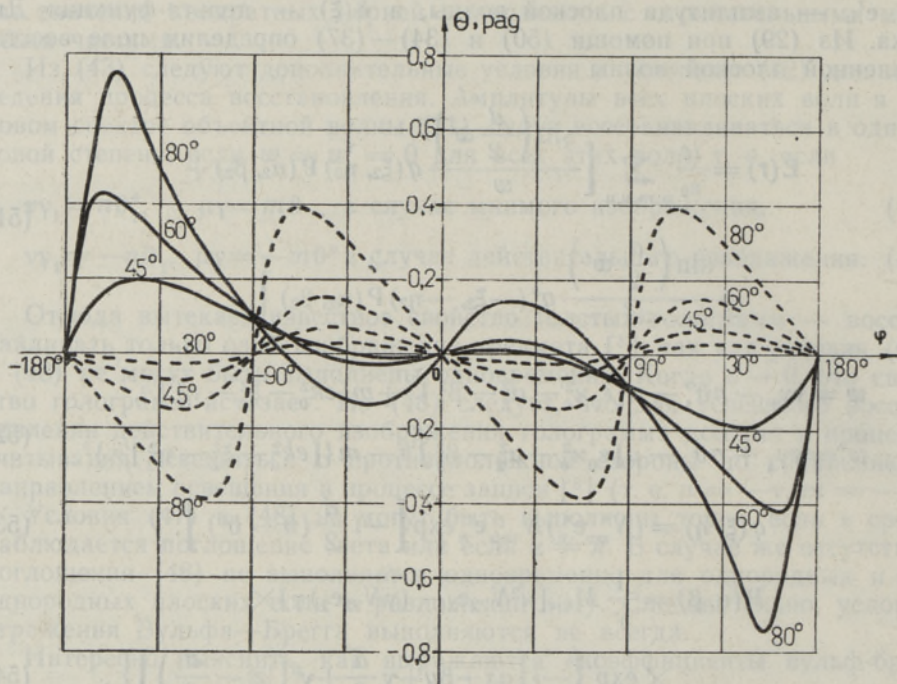


Рис. 2. Функция  $\theta=f(\varphi)$  для нескольких значений угла падения объектного пучка в случаях  $\sigma$ - (---) и  $\pi$ -поляризованного (—) опорного пучка.  
 $\epsilon_0^{1/2}=1,5-i0,006$ ;  $d/\lambda=10$ ;  $\chi=\nu=\mu=\psi=1$ .

[4]. В таких случаях в сумме (51) один член, в котором  $n = \nu$ ,  $m = u$ ,  $\nu = \chi$  и  $\mu = \psi$ , является «главным», а остальные члены будут играть роль как бы малых поправок к нему. Поэтому в большинстве интересующих нас случаев мы воспользовались только одним, главным, членом суммы (51). Тогда, например, поляризация восстановленной волны полностью определяется выражением (54).

Если не учитывать преломления на границах голограммы, то из (54) для вектора поля получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \sim \mathbf{e}_x - \frac{1}{\chi_0^2} (\vec{a}_2 \mathbf{e}_x) \vec{a}_2. \quad (57)$$

Поскольку геометрический смысл выражения (57) вполне ясен, то пространственное положение эллипса поляризации волны (54) определим по отношению к плоскости поляризации, задаваемой этим выражением (57). Результаты соответствующих вычислений, проведенных на ЭВМ «Минск-22», представлены на рис. 2 и 3.

На рис. 2 по оси ординат отложены значения угла  $\theta$  между большой полуосью эллипса поляризации волны (54) и плоскостью поляризации линейно поляризованной плоской волны (57), направление распространения которой, как и у волны (54), определяется вектором  $\vec{a}_2$ . По оси абсцисс отложены значения угла  $\varphi$  между плоскостью падения объектного пучка и плоскостью  $y=0$  (плоскостью падения опорного пучка, см. рис. 1). Графики построены для нескольких значений угла падения объектного пучка (угол между  $z$ -осью и вектором  $\vec{a}_2$ ) в слу-



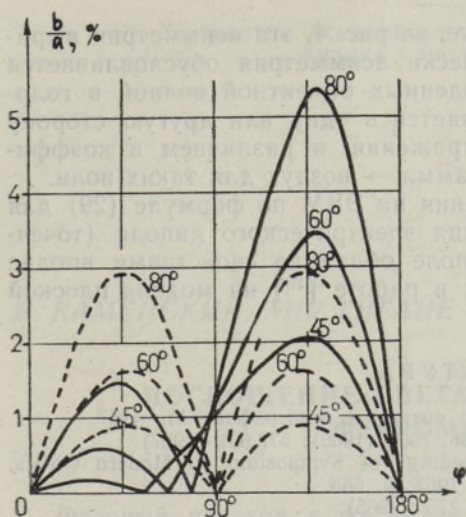
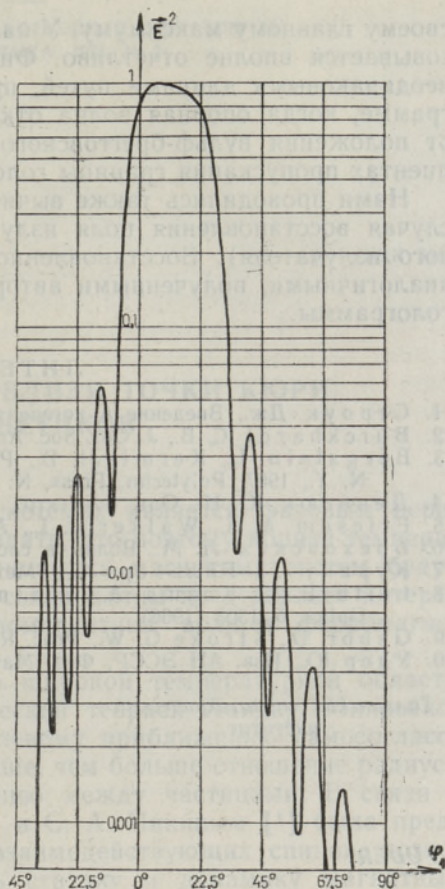


Рис. 3. Функция  $b/a = f(\varphi)$  для нескольких значений угла падения объектного пучка в случаях  $\sigma$ - (---) и  $\pi$ -поляризованного (—) опорного пучка.  $f(-\varphi) = f(\varphi)$ ;  $\epsilon_0^{1/2} = 1,5 - i0,0006$ ;  $d/\lambda = 10$ ,  $\chi = \nu = \mu = \psi = 1$ .

Рис. 4. Относительная интенсивность дифрагированной волны как функции от угла падения опорного пучка в процессе считывания. Углы падения объектного и опорного пучков в процессе записи соответственно равны  $-11,5'$  и  $11,5'$ ;  $\epsilon^{1/2}_0 = \epsilon^{1/2} = 1,5 - i0,006$ ;  $d/\lambda = 10$ ;  $l = \lambda$ .



чаях  $\sigma$ -поляризованного ( $e_x \rightarrow j$ ) и  $\pi$ -поляризованного ( $e_x \rightarrow 0,917i - 0,400k$ ) опорного пучка.

На рис. 3 показаны те же зависимости для отношения малой ( $b$ ) и большой ( $a$ ) полуосей эллипса поляризации.

Поворот плоскости поляризации  $\Theta$  обуславливается различием в значениях коэффициента пропускания и отражения для  $\sigma$ - и  $\pi$ -поляризованных световых волн на границе голограмма  $\rightarrow$  воздух. Эллиптическая же поляризация появляется из-за неодинакового скачка фаз в  $\sigma$ - и  $\pi$ -поляризованных пучках света на этой границе в случае, когда в среде происходит поглощение света.

Для данной голограммы представляет интерес закон изменения интенсивности восстанавливаемой волны при отклонении опорного пучка от положения вульф-брегговского отражения. На рис. 4 приведена такая зависимость, построенная по результатам вычислений на ЭВМ по формуле (51). Все волны  $\sigma$ -поляризованные и распространяются в одной и той же плоскости  $y = 0$  (рис. 1). В случае  $\pi$ -поляризации отличие состоит в действии множителя  $\vec{\gamma}\gamma_1/\kappa^2$ , указанного в (49). Рис. 4 соответствует мнимому изображению в схеме восстановления  $\chi = \nu = 1$ ,  $\psi = u = -1$ .

Экспериментальные данные, полученные в работе [8], не имеют там полного теоретического объяснения: теоретические кривые в отличие от экспериментальных не являются асимметричными по отношению к



своему главному максимуму. У нас же, на рис. 4, эта асимметрия выравнивается вполне отчетливо. Физически асимметрия обуславливается неодинаковыми длинами путей, пройденных объектной волной в голограмме, когда опорная волна отклоняется в одну или другую сторону от положения вольф-брегговского отражения, и различием в коэффициентах пропускания границы голограмма  $\rightarrow$  воздух для таких волн.

Нами проводились также вычисления на ЭВМ по формуле (29) для случая восстановления поля излучения электрического диполя (точечного излучателя). Восстановленное поле обладало свойствами вполне аналогичными, полученными автором в работе [10] на модели плоской голограммы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Строук Дж., Введение в когерентную оптику и голографию, М., 1967.
2. Burckhardt C. B., J. Opt. Soc. Am., 56, 1502 (1966); 57, 601 (1967).
3. Bergstein L., Kermisch D., Proceedings of Symposium on Modern Optics, N. Y., 1967, Polytechn. Press, N. Y., 1967, p. 655.
4. Денисюк Ю. Н., Опт. и спектр., 18, 275 (1965).
5. Friesem A. A., Walker J. L., Appl. Optics, 9, 201 (1970).
6. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, М., 1957.
7. Курант Г., Гильберт Д., Методы математической физики, М.—Л., 1951.
8. Leith E. N., Kozma A., Upatnieks J., Marks J., Massey N., Appl. Optics, 5, 1303 (1966).
9. Gabor D., Stroke G. W., Proc. Roy. Soc., A304, 275 (1968).
10. Удер Ю., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 54 (1973).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 22/V 1972

U. UDER

#### FRESNELI HOLOGRAMMIDE ELEKTROMAGNETILINE TEORIA HÄIRITUSARVUTUSE ESIMESES LÄHENDUSES

Esitatakse valguslainete Fresneli tüüpi ruumilistest hologrammidest taastamise elektromagnetiline teooria. Tulemused võimaldavad määrata lainete polarisatsiooni, mis tavaliselt ei taastu. Objektaine kogu Fourier' spektri täpseks taastamiseks on peale kirjutava ja lugeva tugikiire ruumilise identsuse ka vaja, et valmi hologrammi kompleksne dielektriline läbitavus oleks keskmiselt võrdne regis'reeriva keskkonna omaga. Näidatakse, et tasapinnalise valguslaine hajumine kolmemõõtmelisel hologrammil toimub ainult siis täpselt Wulffi-Breggi seaduse järgi, kui keskkonnas ei esine valguse neeldumist.

U. UDER

#### AN ELECTROMAGNETIC THEORY OF THE VOLUME FRESNEL HOLOGRAM IN THE FIRST-ORDER PERTURBATION CALCULUS

This paper presents an electromagnetic theory of the reconstruction process of light waves from a volume Fresnel hologram. The results presented permit one to determine the state of polarization of the reconstructed waves. In order to exactly reconstruct the whole Fourier spectrum of the object wave in addition to spatial identity of the readout and reference beam, it is necessary to produce a hologram with an average complex dielectric constant identical with that of the registering medium. It is shown that the scattering of a plane wave at a volume hologram obeys the Wulff-Bragg law exactly only in the case when there is no absorption of light in the medium.