EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.2.01

УДК 519.48

Я. ХЕННО

ПЛОТНО ВЛОЖЕННЫЕ ЛЕВЫЕ ИДЕАЛЫ СИСТЕМ МЕНГЕРА. I

Подсистема $A=\{A_n,\ n\in I\}$ системы Менгера [1] $B=\{B_n,\ n\in I\}$ называется левым идеалом системы B (обозначим $(A,B)\in l$), если из $x_1,\ \ldots,\ x_m\in B_n,\ a\in A_m,\ n,m\in I$, следует $x_1\ldots x_m a\in A_n$.

Левый идеал A системы B называется

1) l'-плотным (обозначим $(A,B)\in l'$), если всякая ненулевая конгруэнция системы B индуцирует ненулевую конгруэнцию на подсистеме A;

2) l''-плотным (обозначим $(A,B)\in l''$), если $(A,B)\in l'$ и для всякой системы Менгера C из $(C,A)\in l$ следует $(C,B)\in l$;

3) l^*-плотным в классе всех систем Менгера (обозначим $(A,B)\in l^*$), если $(A,B)\in l'$ и для всякой системы C из $(A,C)\in l'$, $B\subseteq C$ следует $B=C$.

Назовем вложение (мономорфизм) $\varphi:A\to B$ $l'(l'',l^*)$-плотным, если $(\varphi A,B)\in l'$ $((\varphi A,B)\in l'',\ \ (\varphi A,B)\in l^*)$.

Из определений ясно, что если некоторую систему Менгера A можно l''-плотно вложить в некоторую собственную надсистему B, то система A не может иметь l^*-плотных левых идеалов.

Назовем элемент $e\in A_n,\ n\in I$, левой единицей системы Менгера $A=\{A_n,\ n\in I\}$, если при всяком $x\in A_n$ имеем

$$e\ldots ex=x. \tag{1}$$

Теорема 1. *Всякую систему Менгера $A=\{A_n,\ n\in I\}$ можно l''-плотно вложить в такую систему Менгера $C=\{C_n,\ n\in I\}$, что всякое C_n, $n\in I$, содержит левую единицу системы C.*

Доказательство. Доказательство тривиально, если всякое A_n, $n\in I$, содержит левую единицу системы A, ибо тогда можно взять $C=A$. Поэтому предположим, что множество I_1 всех индексов $k\in I$, при которых A_k не содержит левой единицы, непусто. Тогда при всяком $a\in A_k,\ k\in I_1$, существует элемент $b\in A_k$ такой, что

$$a\ldots ab\neq b. \tag{2}$$

Доказательство теоремы в этом нетривиальном случае состоит из ряда лемм и определений.

---

[1] Все не приведенные здесь определения можно найти в [1,2].

Пусть ε^k, $k \in I_1$, — символы, не принадлежащие системе A. Определим индуктивно множества W_n, $n \in I$, слов над множеством $X = \{X_n, n \in I\}$, где $X_n = A_n \cup \{\varepsilon^n\}$, если $n \in I_1$, и $X_n = A_n$, если $n \in I \setminus I_1$. При определении сопоставим всякому слову w натуральное число $h(w) \in \{1, 2\}$, которое назовем весом слова w.

Определение I.

I.1. При всяком $n \in I$ словами весом 1 из множества W_n являются все символы из множества X_n и только они.

I.2. Словами весом 2 из множества W_n, $n \in I$, являются всевозможные выражения вида $w_1 \ldots w_m \varepsilon^m$, где $w_1, \ldots, w_m \in A_n$, $m \in I_1$.

Слова $w_1 \in W_n$, $w_2 \in W_m$ считаем равными только при их графическом равенстве, т. е. тогда и только тогда, когда $m = n$, $h(w_1) = h(w_2)$, причем

а) если $h(w_1) = h(w_2) = 1$, то либо $w_1, w_2 \in A_n$ и w_1, w_2 равны в системе Менгера A, либо $w_1 = w_2 = \varepsilon^n$;

в) если $h(w_1) = h(w_2) > 1$, $w_1 = w_{11} \ldots w_{1k} \varepsilon^k$, $w_2 = w_{21} \ldots w_{2l} \varepsilon^l$, то $k = l$ и $w_{1i} = w_{2i}$, $i = 1, \ldots, k$ (ввиду $h(w_{1i}) = h(w_{2i}) = 1$ равенство для слов w_{1i}, w_{2i} в (а) уже определено).

Зафиксируем в каждом A_n, $n \in I_1$, произвольным образом некоторый элемент e^n и сопоставим всяким $x_1, \ldots, x_m \in W_n$, $y \in W_m$, $n, m \in I$, слово $x_1 \ldots x_m y \in W_n$, которое назовем произведением слов $x_1, \ldots, x_m, y$.

Определение II.

Пусть $h(y) = 1$.

II.1. Если

$$x_1, \ldots, x_m \in A_n, \tag{3}$$

то в случае $y \in A_m$ произведение определяется так же, как в системе A, а в случае $y = \varepsilon^m$ произведением считаем слово $x_1 \ldots x_m \varepsilon^m$.

II.2. Пусть (3) не выполняется.

II.2.1. Если

$$x_1 \in A_n, \tag{4}$$

то положим

$$x_1 \ldots x_m y = x_1 \ldots x_1 y, \tag{5}$$

где произведение $x_1 \ldots x_1 y$ ввиду (4) и II.1 уже определено.

II.2.2. Если

$$x_1 = \varepsilon^n, \quad n \neq m, \tag{6}$$

то положим

$$x_1 \ldots x_m y = e^n \ldots e^n y, \tag{7}$$

где произведение $e^n \ldots e^n y$ ввиду $e^n \in A_n$ и II.1 уже определено.

II.2.3. Если

$$x_1 = \varepsilon^n, \quad n = m, \tag{8}$$

то положим

$$x_1 \ldots x_m y = y. \tag{9}$$

Этим все случаи, где $h(x_1) = 1$, рассмотрены. Заметим, что из определений II.2.1.—II.2.3 при $h(x_1) = 1$, $y \in A_m$ вытекает $x_1 \ldots x_m y \in A_n$.

II.2.4. Если

$$x_1 = w_1 \ldots w_k \varepsilon^k, \quad k \neq m, \tag{10}$$

то положим

$$x_1 \ldots x_m y = (w_1 \ldots w_k e^k) \ldots (w_1 \ldots w_k e^k) y, \tag{11}$$

где ввиду $h(w_1)=1$, $e^k\in A_k$ согласно сделанному выше замечанию имеем $w_1\dots w_k e^k\in A_n$, так что $h(w_1\dots w_k e^k)=1$ и произведение в правой части равенства (11) уже определено.

II.2.5. Если

$$x_1=w_1\dots w_k\varepsilon^k,\quad k=m, \tag{12}$$

то положим

$$x_1\dots x_m y=w_1\dots w_m y, \tag{13}$$

где опять-таки ввиду $h(w_1)=1$ произведение $w_1\dots w_m y$ уже определено.

Этим произведение при $h(y)=1$ определено.

II.3. Если $y=w_1\dots w_k\varepsilon^k$, то положим

$$x_1\dots x_m y=(x_1\dots x_m w_1)\dots(x_1\dots x_m w_k)\,\varepsilon^k. \tag{14}$$

Ввиду $h(w_1)=\dots=h(w_k)=h(\varepsilon^k)=1$ произведение в правой части выражения (14) уже определено.

Непосредственно из приведенного определения вытекают следующие замечания.

Замечание 1. Если $y=\varepsilon^m$, то при всяких $x_1,\dots,x_m\in W_n$, $n\in I$, $m\in I_1$ произведение $x_1\dots x_m y$ или равно ε^m, или имеет вид $w'_1\dots w'_m\varepsilon^m$.

Если слово $y\in W_m$ имеет вид $y=w_1\dots w_k\varepsilon^k$, то при всяких $x_1,\dots,x_m\in W_n$ произведение $x_1\dots x_m y$ имеет вид $w'_1\dots w'_k\varepsilon^k$.

Замечание 2. Если $C=\{C_n,\ n\in I\}$ — левый идеал системы Менгера A, то при всяких $x_1,\dots,x_m\in W_n$, $c\in C_m$, $n,\ m\in I$ имеем $x_1\dots x_m c\in C_n$.

Из замечаний 1 и 2 (принимая в последнем $C=A$) вытекает

Замечание 3. При всяких $x_1,\dots,x_m\in W_n$, $y\in W_m$ имеем $x_1\dots x_m y\in A_n$ тогда и только тогда, когда $y\in A_m$.

Замечание 4. Если для слов $x_1,\dots,x_m\in W_n$, $n,\ m\in I$, не выполняется (3), то при всяком $y\in W_m$ в случае (4) выполняется (5); в случае (6) выполняется (7); в случае (8) выполняется (9); в случае (10) выполняется (11); в случае (12) выполняется (13).

Для обоснования последнего замечания отметим, что при $h(y)=1$ оно прямо следует из определений, а при $h(y)=2$, $y=v_1\dots v_l\varepsilon^l$ достаточно с помощью определения II вычислить произведения, стоящие в правых и левых частях равенств (5), (7), (9), (11), (13) и учесть, что ввиду $h(v_1)=\dots=h(v_l)=1$ для произведений $x_1\dots x_m v_i$, $i=1,\dots,l$, утверждения замечания 4 выполняются.

Лемма 1. *Совокупность $W=\{W_n,\ n\in I\}$ непересекающихся множеств слов W_n является системой Менгера, т. е. при всяких $x_1,\dots$ $\dots,x_m\in W_n$, $y_1,\dots,y_l\in W_m$, $z\in W_l$, $n,\ m,\ l\in I$ выполняется тождество*

$$x_1\dots x_m(y_1\dots y_l z)=(x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_l)\,z. \tag{15}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $h(z)=1$.

1. Случай

$$y_1,\dots,y_l\in A_m. \tag{16}$$

Если $z=\varepsilon^l$, то выражение $y_1\dots y_l z$ является словом и из определения II.3 следует (15). Поэтому предположим, что

$$z\in A_l. \tag{17}$$

1.1. Если имеет место (3), то (15) следует ввиду (3), (16), (17) из определения II.1 и факта, что в системе Менгера тождество (15) выполняется.

Предположим, что (3) не выполняется.

1.2. В случае (4) согласно замечанию 4 имеем

$$x_1 \dots x_m y_i = x_1 \dots x_1 y_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{18}$$

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l z) = x_1 \dots x_1 (y_1 \dots y_l z). \tag{19}$$

Ввиду $x_1 \in A_n$ из (18), (19) по доказанному в п. 1.1 следует (15).

1.3. В случае (6) согласно замечанию 4 имеем

$$x_1 \dots x_m y_i = e^n \dots e^n y_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{20}$$

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l z) = e^n \dots e^n (y_1 \dots y_l z). \tag{21}$$

Ввиду $e^n \in A_n$ из (20), (21) по доказанному в п. 1.1 следует (15).

1.4. В случае (8) согласно замечанию 4 имеем

$$x_1 \dots x_m y_i = y_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{22}$$

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l z) = y_1 \dots y_l z. \tag{23}$$

Из (22), (23) следует (15).

1.5. В случае (10) по замечанию 4 имеем

$$x_1 \dots x_m y_i = (w_1 \dots w_k e^k) \dots (w_1 \dots w_k e^k) y_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{24}$$

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l z) = (w_1 \dots w_k e^k) \dots (w_1 \dots w_k e^k) (y_1 \dots y_l z). \tag{25}$$

Ввиду $e^k \in A_k$ согласно замечанию 3 имеем $w_1 \dots w_k e^k \in A_m$, так что $h(w_1 \dots w_k e^k) = 1$ и по доказанному в п. 1.1—1.4

$$(w_1 \dots w_k e^k) \dots (w_1 \dots w_k e^k) (y_1 \dots y_l z) =$$
$$= ((w_1 \dots w_k e^k) \dots (w_1 \dots w_k e^k) y_1) \dots ((w_1 \dots w_k e^k) \dots (w_1 \dots w_k e^k) y_l) z. \tag{26}$$

Из (24)—(26) следует (15).

1.6. В случае (12) согласно замечанию 4 имеем

$$x_1 \dots x_m y_i = w_1 \dots w_m y_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{27}$$

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_l z) = w_1 \dots w_m (y_1 \dots y_l z). \tag{28}$$

Ввиду $h(w_1) = \dots = h(w_m) = 1$ из (27), (28) по доказанному в п. 1.1—1.4 следует (15).

2. Пусть (16) не выполняется. Это значит, что существует j, $1 \leqslant j \leqslant l$, такой, что $y_j \notin A_m$. Согласно замечанию 3 тогда и

$$x_1 \dots x_m y_j \notin A_n. \tag{29}$$

2.1. В случае $y_1 \in A_m$ по замечанию 3 имеем

$$x_1 \dots x_m y_1 \in A_n \tag{30}$$

и ввиду (29), (30) согласно определению II.2.1 получим

$$(x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_l) z = (x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_1) z, \tag{31}$$

$$y_1 \dots y_l z = y_1 \dots y_1 z. \tag{32}$$

Ввиду $y_1 \in A_m$ из (31), (32) по доказанному в п. 1 следует (15).

2.2. В случае $y_1 = \varepsilon^m$, $m \neq l$, по определению II.2.2 имеем

$$y_1 \dots y_l z = e^m \dots e^m z. \tag{33}$$

2.2.1. В случае (3) выражение $x_1 \dots x_m y_1 = x_1 \dots x_m \varepsilon^m$ является словом и по II.2.2 имеем

$$(x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_l) z = (x_1 \dots x_m e^m) \dots (x_1 \dots x_m e^m) z. \tag{34}$$

Ввиду $e^m \in A_m$ из (33), (34) по доказанному в п. 1.1—1.6 следует (15).

Предположим, что (3) не выполняется. Тогда

2.2.2. В случае (4) доказательство совпадает с таковым для случая 1.2.

2.2.3. В случае (6) доказательство совпадает с таковым для 1.3.

2.2.4. В случае (8) доказательство совпадает с таковым для 1.4.

2.2.5. В случае (10) доказательство совпадает с таковым для 1.5.

2.2.6. В случае (12) доказательство совпадает с таковым для 1.6.

2.3. В случае $y_1 = \varepsilon^m$, $m = l$, согласно II.2.3 имеем

$$y_1 \ldots y_l z = z. \tag{35}$$

2.3.1. В случае (3) выражение $x_1 \ldots x_m y_1 = x_1 \ldots x_m \varepsilon^m$ является словом и по II.2.3 имеем

$$(x_1 \ldots x_m y_1) \ldots (x_1 \ldots x_m y_l) z = x_1 \ldots x_m z. \tag{36}$$

Из (35), (36) следует (15).

В случаях, когда (3) не выполняется, доказательство совпадает с таковым в п. 1.

2.4. В случае $y_1 = v_1 \ldots v_s \varepsilon^s$, $s \neq l$, имеем по II.2.4

$$y_1 \ldots y_l z = (v_1 \ldots v_s e^s) \ldots (v_1 \ldots v_s e^s) z, \tag{37}$$

а по II.3

$$x_1 \ldots x_m y_1 = (x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_s) \varepsilon^s. \tag{38}$$

Так как выражение $v_1 \ldots v_s \varepsilon^s$ — слово, то ввиду определения 1.2 получим $v_j \in A_m$. Согласно замечанию 3 отсюда следует $x_1 \ldots x_m v_j \in A_n$, так что вследствие 1.2 выражение $(x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_s) \varepsilon^s$ является словом и согласно II.2.4 из (38) получим

$$(x_1 \ldots x_m y_1) \ldots (x_1 \ldots x_m y_l) z =$$
$$= ((x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_s) e^s) \ldots ((x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_s) e^s) z. \tag{39}$$

Ввиду $h(v_1) = \ldots = h(v_s) = h(e^s) = 1$ и доказанного выше имеем

$$(x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_s) e^s = x_1 \ldots x_m (v_1 \ldots v_s e^s). \tag{40}$$

Так как $e^s \in A_s$, то по замечанию 3 $v_1 \ldots v_s e^s \in A_m$, так что $h(v_1 \ldots v_m e^s) = 1$ и согласно доказанному выше получим

$$(x_1 \ldots x_m (v_1 \ldots v_s e^s)) \ldots (x_1 \ldots x_m (v_1 \ldots v_s e^s)) z =$$
$$= x_1 \ldots x_m ((v_1 \ldots v_s e^s) \ldots (v_1 \ldots v_s e^s) z). \tag{41}$$

Из (37)—(41) следует (15).

2.5. В случае $y_1 = v_1 \ldots v_l \varepsilon^l$ имеем

$$y_1 \ldots y_l z = v_1 \ldots v_l z, \tag{42}$$

$$x_1 \ldots x_m y_1 = (x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_l) \varepsilon^l. \tag{43}$$

Точно так же, как в случае 2.4, доказывается, что выражение в правой части равенства (43) является словом, так что согласно II.2.5 из (43) получим

$$(x_1 \ldots x_m y_1) \ldots (x_1 \ldots x_m y_l) z = (x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_l) z. \tag{44}$$

Ввиду $h(v_1) = \ldots = h(v_l) = 1$ и доказанного выше имеем

$$(x_1 \ldots x_m v_1) \ldots (x_1 \ldots x_m v_l) z = x_1 \ldots x_m (v_1 \ldots v_l z). \tag{45}$$

Из (42), (45) следует (15).

Этим утверждение леммы при $h(z)=1$ доказано. Если $h(z)=2$, $z=w_1\dots w_k\varepsilon^k$, то ввиду $h(w_1)=\dots=h(w_k)=h(\varepsilon^k)=1$ и доказанного выше получим

$$\begin{aligned}&x_1\dots x_m(y_1\dots y_l z)=x_1\dots x_m(y_1\dots y_l(w_1\dots w_k\varepsilon^k))=\\&=x_1\dots x_m((y_1\dots y_l w_1)\dots(y_1\dots y_l w_k)\varepsilon^k)=\\&=(x_1\dots x_m(y_1\dots y_l w_1))\dots(x_1\dots x_m(y_1\dots y_l w_k))\varepsilon^k=\\&=((x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_l)w_1)\dots((x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_l)w_k)\varepsilon^k=\\&=(x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_l)(w_1\dots w_k\varepsilon^k)=(x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_l)z.\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Из определений I.1, II.1 следует, что A — подсистема системы Менгера W.

Лемма 2. *Всякая конгруэнция системы W, которая на подмножестве $X\subseteq W$ является ненулевой (т. е. склеивает различные элементы множества X), является ненулевой и на подсистеме $A\subseteq W$.*

Доказательство. Пусть ϱ — конгруэнция системы W, являющаяся на множестве X ненулевой. Это значит, что существуют $x_1, x_2\in X_k$, $k\in I$, $x_1\neq x_2$, такие, что $x_1\varrho x_2$. Утверждение леммы выполняется для ϱ тривиально, если x_1, $x_2\in A_n$, поэтому предположим, что $k\in I_1$, $x_1=\varepsilon^k$, $x_2=a\in A_k$ (вследствие определения множества X и симметричности отношения ϱ это всегда возможно). Ввиду $k\in I_1$ существует элемент $b\in A_k$ такой, что выполняется (2), следовательно, $b=\varepsilon^k\dots\varepsilon^k b\varrho a\dots ab\neq\neq b$, т. е. ϱ является ненулевой и на подсистеме A. Лемма доказана.

Пусть теперь θ — максимальная конгруэнция системы W, которая является на подмножестве X нулевой (существование такой θ доказано в [1]). Обозначим $C=W/\theta$. Из определения системы C, замечания 2 и леммы 2 ясно, что A можно l''-плотно вложить в систему C; остается показать, что всякое C_n, $n\in I$, содержит левую единицу системы C.

Согласно замечанию 4 имеем $\varepsilon^n\dots\varepsilon^n y=y$ при всяких $y\in A_n$, $n\in I_1$, т. е. ε^n — левая единица системы W при всяком $n\in I_1$. Пусть теперь $n\in I\setminus I_1$. Из определения множества I_1 следует, что множество A_n содержит левую единицу системы A. Обозначим ее через ε^n (это не должно вызвать недоразумений, ибо раньше символы ε^n были определены только при $n\in I_1$). Согласно определению $X_n=A_n$ при всяком $n\in I\setminus I_1$, следовательно, для всякого $y\in W_n$ имеем при $h(y)=1$, что $y\in A_n$ и $\varepsilon^n\dots\varepsilon^n y=y$. Согласно же определению II.2.1, если $h(y)=2$, $y=w_1\dots w_k\varepsilon^k$, то ввиду $h(w_1)=\dots=h(w_k)=1$ и определения II.3 получим, что $\varepsilon^n\dots\varepsilon^n y=\varepsilon^n\dots\varepsilon^n(w_1\dots w_k\varepsilon^k)=(\varepsilon^n\dots\varepsilon^n w_1)\dots(\varepsilon^n\dots\varepsilon^n w_k)\varepsilon^k==w_1\dots w_k\varepsilon^k=y$, т. е. ε^n — левая единица системы W при всяком $n\in I$. Ясно, что и в факторсистеме C всякое C_n, $n\in I$, содержит левую единицу системы C. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $A=\{A_n, n\in I\}$ — такая система Менгера, что $I\neq\{1\}$. Если существуют элементы $c\in A_k$, a_1, $a_2\in A_t$, t, $k\in I$, $k>1$, такие, что $a_1\dots a_1 c\neq a_2\dots a_2 c$, то систему A можно l''-плотно вложить в некоторую собственную надсистему $B=\{B_n, n\in I\}$.*

Доказательство. Теорема доказывается при помощи ряда лемм и определений.

Обозначим $M=\{0,1\}$ и сопоставим всякому натуральному числу n функции $[n,i]:M^n\to\{1,\dots,n\}$, $i=1,\dots,n$, определенные следующим образом:

$$[n,i](\xi_1,\dots,\xi_n)=\begin{cases}1, & \text{если } n=1 \text{ или если } n>1 \text{ и } \xi_1=1;\\ 2, & \text{если } n>1,\ \max\xi_j>0 \text{ и } \xi_1=0;\\ i, & \text{если } n>1 \text{ и } \xi_1=\dots=\xi_n=0,\end{cases}\tag{46}$$

где $\xi_1,\dots,\xi_n\in M$.

Сопоставим всякому $a \in A_n$, $n \in I$, не принадлежащие системе A символы a^0, a^1 и обозначим $A^0_n = \{a^0,\ a \in A_n\}$, $A^1_n = \{a^1,\ a \in A_n\}$, $W_n = A^0_n \cup A^1_n$, $W = \{W_n,\ n \in I\}$. Сопоставим всяким $a^{\xi_1}_1, \ldots, a^{\xi_m}_m \in W_n$, $b^{\eta} \in W_m$, $n, m \in I$, их произведение $a^{\xi_1}_1 \ldots a^{\xi_m}_m b^{\eta} \in W_n$, определенное следующим образом:

$$a^{\xi_1}_1 \ldots a^{\xi_m}_m b^{\eta} = (a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} b)^{\eta}, \tag{47}$$

где $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in M^m$.

Лемма 3. *W является системой Менгера, т. е. при всяких $x_1, \ldots, x_m \in W_n$, $y_1, \ldots, y_l \in W_m$, $z \in W_l$, $n, m, l \in I$ выполняется тождество* (15).

Доказательство. Пусть $x_i = a^{\xi_i}_i$, $i = 1, \ldots, m$, $y_j = b^{\eta_j}_j$, $j = 1, \ldots, l$, $z = c^{\tau}$, где $\xi_i, \eta_j, \tau \in M$, $a_i, b_j, c \in A$ (из определения W следует, что такое представление однозначно). Обозначим $\bar{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\bar{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_l)$. Используя то обстоятельство, что в системе Менгера A тождество (15) выполняется, при помощи определения (47) получим

$$\begin{aligned}
&(x_1 \ldots x_m y_1) \ldots (x_1 \ldots x_m y_l) z = (a^{\xi_1}_1 \ldots a^{\xi_m}_m b^{\eta_1}_1) \ldots (a^{\xi_1}_1 \ldots a^{\xi_m}_m b^{\eta_l}_l) c^{\tau} = \\
&= (a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} b_1)^{\eta_1} \ldots (a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} b_l)^{\eta_l} c^{\tau} = \\
&= ((a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} b_{[l,1]\bar{\eta}}) \ldots (a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} b_{[l,l]\bar{\eta}}) c)^{\tau} = \\
&= (a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]} (b_{[l,1]\bar{\eta}} \ldots b_{[l,l]\bar{\eta}} c))^{\tau} = a^{\xi_1}_1 \ldots a^{\xi_m}_m (b_{[l,1]\bar{\eta}} \ldots b_{[l,l]\bar{\eta}} c)^{\tau} = \\
&= a^{\xi_1} \ldots a^{\xi_m}_m (b^{\eta_1}_1 \ldots b^{\eta_l}_l c^{\tau}) = x_1 \ldots x_m (y_1 \ldots y_l z).
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Отображение $a \to a^0$, $a \in A$, $a^0 \in W$, является вложением системы A в систему W, которое всякому левому идеалу C системы A сопоставляет левый идеал C^0 системы W.*

Доказательство. Из определения системы W следует, что отображение $a \to a^0$ — взаимно однозначное, и так как при всяких $a^0_1, \ldots, a^0_m \in A^0_n$, $b^0 \in A^0_m$ согласно определениям (46), (47) имеем $a^0_1 \ldots a^0_m b = (a_{[m,1](0,\ldots,0)} \ldots a_{[m,1](0,\ldots,0)} b)^0 = (a_1 \ldots a_m b)^0$, то отображение $a \to a^0$ — изоморфизм системы A на систему A^0.

Пусть C — левый идеал системы A. Тогда при всяких $a^{\xi_1}_1, \ldots, a^{\xi_m}_m \in W_n$, $c^0 \in C^0_m$, $n, m \in I$ имеем $a^{\xi_1}_1 \ldots a^{\xi_m}_m c^0 = (a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} c)^0$. Так как C — левый идеал системы A, то $a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} c \in C_n$, следовательно, $(a_{[m,1]\bar{\xi}} \ldots a_{[m,m]\bar{\xi}} c)^0 \in C^0_n$ и C^0 — левый идеал системы W. Лемма 4 доказана.

Обозначим $X_t = A^0_t \cup \{a^1_1\}$, $X_n = A^0_n$ при $n \neq t$, $X = \{X_n,\ n \in I\}$.

Лемма 5. *Всякая конгруэнция ϱ системы Менгера W, которая является ненулевой на подмножестве $X \subseteq W$, является ненулевой и на подсистеме A^0 системы W.*

Доказательство. Пусть ϱ — конгруэнция системы W, которая склеивает различные элементы множества X, т. е. существуют $x_1, x_2 \in X_n$, $x_1 \neq x_2$ такие, что $x_1 \varrho x_2$. Утверждение леммы выполняется для ϱ тривиально, если $x_1, x_2 \in A^0_n$, поэтому предположим, что $n = t$ и $x_1 = a^1_1$,

$x_2 = a^0 \in A^0_k$ (ввиду симметричности отношения ϱ это всегда можно сделать). Тогда $(a^1_1 a^1_2 a^1_2 \ldots a^1_2 c^0)\,\varrho\,(a^0 a^1_2 a^1_2 \ldots a^1_2 c^0)$, но согласно определениям (46) и (47) имеем

$$a^1_1 a^1_2 a^1_2 \ldots a^1_2 c^0 = (a_{[k,1](1,\ldots,1)} \ldots a_{[k,k](1,\ldots,1)} c)^0 = (a_1 \ldots a_1 c)^0 \in A^0_t,$$

$$a^0 a^1_2 a^1_2 \ldots a^1_2 c^0 = (a_{[k,1](0,1,\ldots,1)} \ldots a_{[k,k](0,1,\ldots,1)} c)^0 = (a_2 \ldots a_2 c)^0 \in A^0_t,$$

и так как $a_1 \ldots a_1 c \neq a_2 \ldots a_2 c$, то конгруэнция ϱ является на подсистеме A^0 ненулевой. Лемма доказана.

Пусть θ — максимальная конгруэнция системы W, которая не склеивает различных элементов множества X, $B = W/\theta$. Так как θ не склеивает различных элементов подмножества $A^0 \subseteq X$, то отображение $a \to a^0$ по-прежнему является вложением системы Менгера A в систему B, которое всякому левому идеалу C системы A сопоставляет левый идеал C^0 системы B. Из определения конгруэнции θ и леммы 4 ясно, что это вложение является l''-плотным. Теорема 2 доказана.

Согласно сделанному после определения плотных вложений замечанию из доказанных теорем вытекает следующее

Следствие. *Если система Менгера $A = \{A_n,\ n \in I\}$ имеет l^*-плотный левый идеал, то всякое A_n, $n \in I$, содержит левую единицу системы A и при всяких $a_1, a_2 \in A_n$, $c \in A_m$, $n, m \in I$, $m > 1$ имеем* $a_1 \ldots a_1 c = a_2 \ldots a_2 c$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хенно Я., Плотно вложенные правые идеалы систем Менгера, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, 131 (1972).
2. Хенно Я., Плотные вложения в системах Менгера, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, 232 (1972).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 10/XI 1972

I. HENNO

MENGERI SÜSTEEMIDE TIHEDALT SISESTATUD VASAKPOOLSED IDEAALID

Tõestatakse, et kui Mengeri süsteemil $A = \{A_n,\ n \in I\}$ leidub tihedalt sisestatud vasakpoolne ideaal, siis iga $n \in I$ jaoks leidub selline $\varepsilon^n \in A_n$, et $\varepsilon^n \ldots \varepsilon^n a = a$ iga $a \in A_n$ korral ja $a_1 \ldots a_1 a = a_2 \ldots a_2 a$ igasuguste $a_1, a_2 \in A_n$, $n \in I$, $a \in A_m$, $m \in I$, $m > 1$ korral.

J. HENNO

DENSELY EMBEDDED LEFT IDEALS OF MENGER SYSTEMS

It is proved that if Menger system $A = \{A_n,\ n \in I\}$ has a densely embedded left ideal then there exists such an $\varepsilon^n \in A_n$ for any $n \in I$ that $\varepsilon^n \ldots \varepsilon^n a = a$ for every $a \in A_n$ and $a_1 \ldots a_1 a = a_2 \ldots a_2 a$ for arbitrary $a_1, a_2 \in A_n$, $n \in I$, $a \in A_m$, $m \in I$, $m > 1$.