LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.2.12

УДК 530.12 : 531.51

В. МЮРК, И. ПИЙР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛАБОМ СТАТИЧЕСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

V. MÜRK, I. PIIR. KERALAINETE LEVIMINE NÕRGAS STAATILISES GRAVITATSIOONIVÄLJAS

V. MÜRK, I. PIIR. THE PROPAGATION OF SPHERICAL WAVES IN THE WEAK STATICAL GRAVITATIONAL FIELD

В связи с теоретической разработкой задачи об излучении гравитационных волн изолированными источниками возникла интересная дополнительная проблема об отражении, сопровождающем процесс распространения волн в неевклидовом (даже в пустом) пространстве-времени. Наиболее детально эта проблема исследовалась на примере радиальных волн в центрально-симметричном гравитационном поле. Интерес представляет и более сложный случай, когда источники первоначальных волн находятся вне центра внешнего гравитационного поля.

Одна попытка в этом направлении была сделана К. Нордтведтом [1]. Он рассматривал распространение плоских скалярных и электромагнитных волн в слабом статическом гравитационном поле с метрикой

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Psi}{c^2}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{2\gamma\Psi}{c^2}\right) dl^2, \tag{1}$$

где Ψ — ньютоновский потенциал гравитационного поля; dl — линейный элемент 3-мерного плоского пространства; γ — постоянная. Значение $\gamma = 0$ соответствует так наз. ньютоновскому приближению, при $\gamma = 1$ получается приближение слабого поля в теории Эйнштейна, остальные значения постоянной γ дают разные частные случаи теории К. Бранса и Р. Дикке [2]. К. Нордтведт пришел к выводу, что в первом приближении волны отражаются в гравитационном поле, как только γ отличается от нуля. Однако этот результат требует дальнейшего уточнения, так как фактически рассматривается лишь одномерная задача, т. е. предполагается, что потенциал Ψ зависит только от координаты z (ось z направлена по нормали плоских волн).

В данном сообщении на базе скалярного волнового уравнения рассматривается более общая аксиально-симметричная задача. Следуя К. Нордтведту, метрика пространства-времени выбрана в виде (1), причем

$$dl^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2.$$

Если предполагать, что потенциал Ψ и волновая функция Φ не зависят от полярного угла φ, то исходное уравнение

$$(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu})_{,\nu} = 0$$

можно записать с точностью до членов первого порядка относительно Ψ в следующем виде:

$$\frac{1}{c^2}\left[1-\frac{2(\gamma+1)}{c^2}\Psi\right]\Phi_{,tt}-\frac{1}{r}(r\Phi)_{,rr}-\frac{1}{r^2\sin\vartheta}(\sin\vartheta\,\Phi_{,\vartheta})_{,\vartheta}+$$

$$+\frac{\gamma-1}{c^2}\left(\Psi_{,r}\Phi_{,r}+\frac{\Psi_{,\vartheta}\Phi_{,\vartheta}}{r^2}\right)=0. \qquad (2)$$

Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$\Phi=\frac{1}{r}\left(1+\frac{\gamma-1}{2c^2}\Psi\right)F\left\{ct-\left[r-\frac{\gamma+1}{c^2}\int_0^r\Psi(\tau,\vartheta)\,d\tau\right]\right\}+\underset{1}{\Phi}. \qquad (3)$$

Здесь $\underset{1}{\Phi}$ — поправка первого порядка относительно Ψ, и она определяется уравнением

$$\underset{1}{\Phi}_{,tt}-c^2\Delta\underset{1}{\Phi}=\frac{\gamma-1}{2r}(\Delta\Psi)F+$$

$$+\frac{\gamma+1}{r}\left\{\Psi_{,r}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\int_0^r\left[\sin\vartheta\,\Psi_{,\vartheta}(\tau,\vartheta)\right]_{,\vartheta}d\tau\right\}F', \qquad (4)$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\frac{1}{r^2}\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

есть оператор Лапласа. В отсутствии гравитационного поля (т. е. при $\Psi=0$) решение (3) описывает простую сферическую волну $\frac{F(ct-r)}{r}$, расходящуюся из центра $r=0$. Поправочный член в аргументе функции F учитывает зависимость скорости света от потенциала гравитационного поля. Так как

$$\Delta\Psi=4\pi k\varrho(r,\vartheta) \qquad (5)$$

(ϱ — плотность массы, k — гравитационная постоянная), то

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\int_0^r\left[\sin\vartheta\,\Psi_{,\vartheta}(\tau,\vartheta)\right]_{,\vartheta}d\tau=4\pi k\int_0^r\varrho(\tau,\vartheta)\tau^2\,d\tau-r^2\Psi_{,r}. \qquad (6)$$

Учитывая соотношения (5) и (6), можно уравнение (4) переписать в следующем виде:

$$\underset{1}{\Phi}_{,tt}-c^2\Delta\underset{1}{\Phi}=2\pi k(\gamma-1)\varrho(r,\vartheta)\frac{F}{r}+4\pi k(\gamma+1)\frac{F'}{r^3}\int_0^r\varrho(\tau,\vartheta)\tau^2\,d\tau. \qquad (7)$$

Нас интересует решение неоднородного уравнения (8), соответствующее нулевым начальным условиям и выражающееся в виде запаздывающего потенциала

$$\underset{1}{\Phi}(t, M) = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint\limits_{r_{MM'} < ct} \frac{1}{r_{MM'}} G\left(t - \frac{r_{MM'}}{c}, M'\right) dV(M'), \qquad (8)$$

где G — неоднородный член уравнения (7).

Поправка $\underset{1}{\Phi}$ описывает отражение или рассеяние первоначальной волны в гравитационном поле. Из формул (7) и (8) видно, что возмущение $\underset{1}{\Phi}$ возникает лишь в тот момент, когда первоначальная волна F достигает области, где $\varrho \neq 0$. При этом имеется два типа источников, вызывающих волновое поле $\underset{1}{\Phi}$. Одни, пропорциональные множителю $\gamma - 1$, имеют место только в неэйнштейновской теории и описывают чистое рассеяние, так как их действие прекращается в момент выхода заднего фронта волны за пределы области распределения масс. Действие других источников, пропорциональных $\gamma + 1$, не ограничено во времени, хотя с ростом r ослабляется.

Отметим, наконец, что если распределение гравитирующей массы центрально-симметричное и источник скалярного поля находится в центре, то развитая здесь теория при $\gamma = 1$ приводит вне области распределения масс к результатам, полученным в работе [3]. В частности, на любом расстоянии r сразу после прохождения переднего фронта первоначальной волны возникает слабая отраженная волна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nordtvedt K., Phys. Rev., **186**, 1352 (1969).
2. Brans C., Dicke R. H., Phys. Rev., **124**, 925 (1961).
3. Пийр И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 253 (1971).

Эстонская сельскохозяйственная академия
Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
8/IX 1971