EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.2.04

УДК 535.345.1

Л. СОССИ, П. КАРД

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА В ТОНКОМ НЕОДНОРОДНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Выведены в двух вариантах новые формулы для коэффициентов отражения и пропускания света тонким неоднородным диэлектрическим слоем. В отличие от известных ранее формул отдельные члены входящих в новые формулы бесконечных рядов имеют простую физическую интерпретацию. Во втором варианте формулы вдобавок значительно проще.

Введение

В предыдущей статье [1] были получены формулы для амплитудных коэффициентов отражения $r(\xi)$ и пропускания $t(\xi)$ монохроматического света на тонком неоднородном диэлектрическом слое (при нормальном падении), показатель преломления которого переходит на внешней границе непрерывно в показатель преломления исходной среды. В случае, если на границе слоя с подложкой скачок показателя преломления тоже отсутствует, то

$$r(\xi) = (f/g)\exp\left(-2ik\int_0^{\xi} n(x)\,dx\right), \tag{1}$$

$$t(\xi) = g^{-1}\exp\left(-ik\int_0^{\xi} n(x)\,dx\right), \tag{2}$$

где k — волновое число, n — показатель преломления слоя. Функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ определяются формулами

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\Phi(x_1)\int_0^{x_1}\Phi^*(x_2)\int_0^{x_2}\Phi(x_3)\ldots\int_0^{x_{2m}}\Phi(x_{2m+1})\,dx_{2m+1}\,dx_{2m}\ldots dx_1 \tag{3}$$

и

$$g(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\xi}\Phi^*(x_1)\int_0^{x_1}\Phi(x_2)\int_0^{x_2}\Phi^*(x_3)\ldots\int_0^{x_{2m-1}}\Phi(x_{2m})\,dx_{2m}\,dx_{2m-1}\ldots dx_1, \tag{4}$$

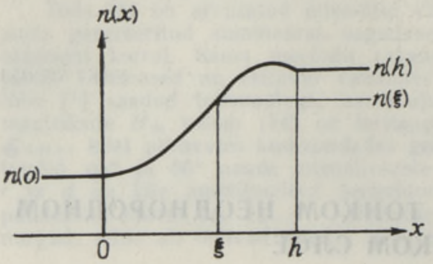
где

$$\Phi(x) = (n'/2n)\exp\left(2ik\int_0^{x} n(u)\,du\right), \tag{5}$$

а n' означает производную dn/dx. Первый член формулы (4) (при $m=0$) равен единице.

Более общие формулы, когда на границе слоя с подложкой или слоя с исходной средой, или на обеих границах показатель преломления имеет скачок, получаются из приведенных формул обычными методами теории дискретно-слоистых оптических пленок. Поэтому мы здесь этих случаев рассматривать не будем.

В формулах (1)—(5) подразумевается, что свет падает на слой в отрицательном направлении оси x. Граница слоя с подложкой находится при $x = 0$, а внешняя граница слоя при $x = \xi$; ξ может иметь любое положительное значение, причем показатель преломления подложки равен $n(0)$, а исходной среды $n(\xi)$ (см. рисунок). Напомним также, что амплитудным коэффициентом пропускания $t(\xi)$ мы называем отношение амплитуды прошедшей волны к амплитуде падающей, умноженное на $(n(0)/n(\xi))^{1/2}$.



В настоящей статье нашей целью является 1) такая модификация формул (1) и (2), в которую вместо рядов (3) и (4) входят другие ряды, члены которых имеют простую физическую интерпретацию; 2) вывод альтернативных, более простых формул для $r(\xi)$ и $t(\xi)$ с сохранением указанной интерпретации отдельных членов.

Внутренние коэффициенты отражения и пропускания

Величины $r(\xi)$ и $t(\xi)$ мы рассматривали до сих пор как коэффициенты отражения и пропускания на неоднородном слое толщины ξ, ограниченном средами с показателями преломления $n(0)$ и $n(\xi)$. Но те же величины можно рассматривать и в качестве так наз. внутренних коэффициентов отражения и пропускания в неоднородном слое толщины h, ограниченном средами с показателями преломления $n(0)$ и $n(h)$ (см. рисунок). В самом деле, пусть электромагнитная волна единичной амплитуды падает на такой слой из среды с показателем преломления $n(h)$. Поле в слое можно тогда представить в виде суммы прямой и обратной волн, амплитуды которых зависят от координаты x (см. [2]). Обозначим амплитуду прямой волны через E_+, а обратной через E_-. Внутренний коэффициент отражения при $x = \xi$ определяется как отношение $E_-(\xi)/E_+(\xi)$. Он равен фактически коэффициенту отражения на слое толщины ξ. В самом деле, если удалить часть слоя в интервале $\xi < x < h$ вместе с первоначальной исходной средой и поместить взамен новую исходную среду с показателем преломления $n(\xi)$, то можно рассматривать волну $E_+(\xi)$ как падающую из этой новой среды, а волну $E_-(\xi)$ как отраженную. Таким образом,

$$r(\xi) = E_-(\xi)/E_+(\xi). \tag{6}$$

Аналогично можем определить внутренний коэффициент пропускания при $x = \xi$ в слое толщины h как отношение $(n(0)/n(\xi))^{1/2}(E_+(0)/E_+(\xi))$, причем те же соображения показывают, что он равен коэффициенту пропускания слоя толщины ξ

$$t(\xi) = (n(0)/n(\xi))^{1/2}(E_+(0)/E_+(\xi)). \tag{7}$$

С другой стороны, оба эти внутренних коэффициента можно выразить через бесконечные ряды, отличные от (3) и (4), путем непосредственного вычисления амплитуд $E_+(\xi)$ и $E_-(\xi)$. Для этого будем рассматривать прямую и обратную волны как суперпозиции бесконечного множества парциальных волн с амплитудами $E_p(\xi)$, образующихся в результате p-кратного отражения внутри слоя ($p = 0, 1, 2, \ldots$). Итак, положим

$$\left.\begin{aligned} E_{+}(\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m}(\xi), \\ E_{-}(\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m+1}(\xi). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Остается вычислить все парциальные амплитуды.

Амплитуда $E_0(\xi)$ прямой первичной волны определяется дифференциальным уравнением

$$-dE_0 = -iknE_0\,dx + (dn/2n)\,E_0, \tag{9}$$

где первый член в правой части учитывает изменение фазы, а второй — изменение амплитуды вследствие отражения. Интегрируя от h до ξ, находим

$$E_0(\xi) = (n(h)/n(\xi))^{1/2} \exp\left(ik\int_h^{\xi} n(x)\,dx\right). \tag{10}$$

Чтобы найти амплитуду $E_1(\xi)$ однажды отраженной волны, положим, что dE_1 есть та ее доля, которая обусловлена отражением в точке x_1 волны E_0. Аналогично (9) можем написать дифференциальное уравнение

$$d(dE_1) = -ikndE_1\,dx - (dn/2n)\,dE_1. \tag{11}$$

Интегрируя от x_1 до ξ и учитывая в качестве начального условия равенство

$$dE_1(x_1) = (n'(x_1)/2n(x_1))\,E_0(x_1)\,dx_1, \tag{12}$$

находим (с учетом формулы (5))

$$dE_1(\xi) = (n(h)/n(\xi))^{1/2} \exp\left(-2ik\int_0^{h} n(x)\,dx\right) \exp\left(-ik\int_h^{\xi} n(x)\,dx\right) \Phi(x_1)\,dx_1. \tag{13}$$

Интегрируя далее по x_1 от 0 до ξ, получаем

$$E_1(\xi) = (n(h)/n(\xi))^{1/2} \exp\left(-2ik\int_0^{h} n(x)\,dx\right) \exp\left(-ik\int_h^{\xi} n(x)\,dx\right) \int_0^{\xi} \Phi(x_1)\,dx_1. \tag{14}$$

Тем же методом можно вычислить последовательно все парциальные амплитуды. Выведем общие рекуррентные формулы. Пусть dE_{2m} есть та доля $2m$-кратно отраженной волны, которая возникает вследствие отражения в точке x_1 волны E_{2m-1}. Аналогично (9) имеем дифференциальное уравнение

$$-d(dE_{2m}) = -ikn\,dE_{2m}\,dx + (dn/2n)\,dE_{2m} \tag{15}$$

с граничным условием

$$dE_{2m}(x_1) = -(n'(x_1)/2n(x_1))\,E_{2m-1}(x_1)\,dx_1. \tag{16}$$

Интегрируя от x_1 до ξ, находим

$$dE_{2m}(\xi) = -\exp\left(ik\int_{x_1}^{\xi} n(x)\,dx\right) (n(x_1)/n(\xi))^{1/2} (n'(x_1)/2n(x_1))\,E_{2m-1}(x_1)\,dx_1. \tag{17}$$

Интегрируя далее по x_1 от ξ до h, имеем

$$E_{2m}(\xi)=(n(\xi))^{-1/2}\exp(ik\int\limits_0^{\xi}n(x)\,dx)\times$$
$$\times\int\limits_h^{\xi}[n'(x_1)/2(n(x_1))^{1/2}]\exp(-ik\int\limits_0^{x_1}n(x)\,dx)\,E_{2m-1}(x_1)\,dx_1. \tag{18}$$

Совершенно аналогично находим

$$E_{2m+1}(\xi)=(n(\xi))^{-1/2}\exp(-ik\int\limits_0^{\xi}n(x)\,dx)\times$$
$$\times\int\limits_0^{\xi}[n'(x_1)/2(n(x_1))^{1/2}]\exp(ik\int\limits_0^{x_1}n(x)\,dx)\,E_{2m}(x_1)\,dx_1. \tag{19}$$

Легко убедиться, учитывая (10), в том, что формула (14) есть частный случай формулы (19) при $m=0$.

Рекуррентные формулы (18) и (19) можно упростить. С этой целью положим временно

$$A(\xi)=(n(\xi))^{-1/2}\exp(ik\int\limits_0^{\xi}n(x)\,dx) \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned}E_{2m}(\xi)&=A(\xi)A^{-1}(h)\,U_{2m}(\xi,h),\\ E_{2m+1}(\xi)&=A^{*}(\xi)A^{-1}(h)\,U_{2m+1}(\xi,h).\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда формулы (10), (18) и (19) примут вид

$$\begin{aligned}U_0(\xi,h)&=1,\\ U_{2m}(\xi,h)&=\int\limits_h^{\xi}\Phi^{*}(x_1)\,U_{2m-1}(x_1)\,dx_1,\\ U_{2m+1}(\xi,h)&=\int\limits_0^{\xi}\Phi(x_1)\,U_{2m}(x_1)\,dx_1.\end{aligned} \tag{22}$$

Теперь легко найдем и формулы для внутренних коэффициентов отражения и пропускания. Во-первых, согласно формулам (8)

$$\begin{aligned}E_{+}(\xi)&=A(\xi)A^{-1}(h)\,U_{+}(\xi,h),\\ E_{-}(\xi)&=A^{*}(\xi)A^{-1}(h)\,U_{-}(\xi,h),\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$U_{-}(\xi,h)=\sum_{m=0}^{\infty}U_{2m+1}(\xi,h)=\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_0^{\xi}\Phi(x_1)\int\limits_h^{x_1}\Phi^{*}(x_2)\int\limits_0^{x_2}\Phi(x_3)\ldots$$
$$\ldots\int\limits_h^{x_{2m-1}}\Phi^{*}(x_{2m})\int\limits_0^{x_{2m}}\Phi(x_{2m+1})\,dx_{2m+1}\,dx_{2m}\ldots dx_1 \tag{24}$$

и

$$U_{+}(\xi,h)=\sum_{m=0}^{\infty}U_{2m}(\xi,h)=\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_h^{\xi}\Phi^{*}(x_1)\int\limits_0^{x_1}\Phi(x_2)\int\limits_h^{x_2}\Phi^{*}(x_3)\ldots$$
$$\ldots\int\limits_h^{x_{2m-2}}\Phi^{*}(x_{2m-1})\int\limits_0^{x_{2m-1}}\Phi(x_{2m})\,dx_{2m}\,dx_{2m-1}\ldots dx_1, \tag{25}$$

причем первый член последнего ряда (при $m=0$) равен единице. Затем, подставляя выражения (23) в формулы (6) и (7), с учетом формулы (20) находим

$$r(\xi) = [U_-(\xi, h)/U_+(\xi, h)]\exp(-2ik\int_0^\xi n(x)\,dx) \tag{26}$$

и

$$t(\xi) = [U_+(0, h)/U_+(\xi, h)]\exp(-ik\int_0^\xi n(x)\,dx). \tag{27}$$

Полученные формулы должны быть эквивалентны формулам (1) и (2). Чтобы убедиться в этом непосредственно, достаточно показать, что

$$\begin{aligned} U_-(\xi, h) &= U_+(0, h) f(\xi), \\ U_+(\xi, h) &= U_+(0, h) g(\xi). \end{aligned} \tag{28}$$

Эти соотношения, действительно, вытекают из того, что f и g с одной стороны и U_- и U_+ с другой удовлетворяют одной и той же системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f' &= \Phi g, \quad g' = \Phi^* f, \\ U'_- &= \Phi U_+, \; U'_+ = \Phi^* U_-. \end{aligned} \tag{29}$$

Следовательно, поскольку f и g — линейно независимые решения этой системы, U_- и U_+ должны линейно зависеть от f и g

$$\begin{aligned} U_- &= C_1 f + C_2 g, \\ U_+ &= C_3 f + C_4 g. \end{aligned} \tag{30}$$

Но при $\xi = 0$ $g = 1$ и $f = U_- = 0$. Следовательно, $C_4 = U_+(0, h)$ и $C_2 = 0$. Далее, $U'_- = C_1 f'$ или в силу (29) и (30) $C_3 f + (C_4 - C_1) g = 0$. Но так как f и g линейно независимы, то $C_3 = 0$ и $C_1 = C_4 = U_+(0, h)$, что и требовалось показать.

Итак, мы получили эквивалентные формулам (1) и (2) формулы (26) и (27). Обе пары формул относятся к одним и тем же величинам $r(\xi)$ и $t(\xi)$, которые можно толковать или как коэффициенты отражения и пропускания слоя толщины ξ, или как внутренние коэффициенты отражения и пропускания внутри слоя толщины h в точке $x = \xi$. Однако обе пары формул вовсе не тождественны. В формулах (1) и (2) нет никакой зависимости от h: ни f и g, ни отдельные члены их разложений (3) и (4) от h не зависят. В формулах же (26) и (27) U_- и U_+ зависят от h, причем, хотя эта зависимость для $r(\xi)$ и $t(\xi)$ в силу формул (28) элиминируется, она сохраняется в формулах (26) и (27) для отдельных членов разложений U_- и U_+. Дело в том, что формулы (28) имеют место только для самих функций f, g, U_- и U_+, но не для отдельных членов их разложений. Иными словами, отдельные члены разложений (3) и (4) не пропорциональны соответствующим членам разложений (24) и (25); зависимость последних от h не может быть выделена в виде множителя $U_+(0, h)$. Это видно хотя бы из того, что первые члены этих разложений от h вообще не зависят. Поэтому приближенные значения $r(\xi)$ и $t(\xi)$, вычисляемые по формулам (26) и (27), зависят от h, причем эта зависимость, очевидно, должна быть тем слабее, чем больше членов взято для данного приближения.

Существенное отличие формул (26) и (27) от формул (1) и (2) состоит также в том, что отдельные члены разложений функций U_- и U_+ имеют конкретный физический смысл: они пропорциональны амплитудам парциальных волн, испытавших в слое определенное число отражений. Члены разложений f и g аналогичного смысла не имеют.

Новые формулы

Результаты предыдущего раздела дают нам возможность получить новые, более простые формулы для коэффициентов отражения и пропускания неоднородного слоя. Рассматривая опять слой толщины h, на который падает волна единичной амплитуды, и вычисляя парциальные волны, можем использовать их для нахождения коэффициентов отражения и пропускания всего слоя (а не внутренних коэффициентов, как в предыдущем разделе). Очевидно,

$$\left.\begin{aligned} r(h) &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m+1}(h) = E_{-}(h), \\ t(h) &= (n(0)/n(h))^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m}(0) = (n(0)/n(h))^{1/2} E_{+}(0). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Подставляя в эти формулы выражения E_{+} и E_{-} из формул (23), учитывая (20) и заменяя $h \to \xi$, находим

$$r(\xi) = \exp\left(-2ik \int_0^{\xi} n(x)\,dx\right) U_{-}(\xi, \xi) \tag{32}$$

и

$$t(\xi) = \exp\left(-ik \int_0^{\xi} n(x)\,dx\right) U_{+}(0, \xi). \tag{33}$$

Это и есть новые формулы. Их можно получить и прямо из (26) и (27), полагая там $h = \xi$ и учитывая, что $U_{+}(\xi, \xi) = 1$. Функции $U_{-}(\xi, \xi)$ и $U_{+}(0, \xi)$ выражаются согласно формулам (24) и (25) в виде рядов

$$\begin{gathered} U_{-}(\xi, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\xi} \Phi(x_1) \int_{\xi}^{x_1} \Phi^*(x_2) \int_0^{x_2} \Phi(x_3) \ldots \\ \ldots \int_{\xi}^{x_{2m-1}} \Phi^*(x_{2m}) \int_0^{x_{2m}} \Phi(x_{2m+1})\,dx_{2m+1}\,dx_{2m} \ldots dx_1 \end{gathered} \tag{34}$$

и

$$\begin{gathered} U_{+}(0, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\xi}^{0} \Phi^*(x_1) \int_0^{x_1} \Phi(x_2) \int_{\xi}^{x_2} \Phi^*(x_3) \ldots \\ \ldots \int_{\xi}^{x_{2m-2}} \Phi^*(x_{2m-1}) \int_0^{x_{2m-1}} \Phi(x_{2m})\,dx_{2m}\,dx_{2m-1} \ldots dx_1 \end{gathered} \tag{35}$$

(здесь первый член равен единице). Новые формулы (32) и (33) проще, чем (1) и (2) или (26) и (27), но в них сохранено преимущество последних: каждый член разложения имеет смысл амплитуды парциальной отраженной или прошедшей волны, характеризуемой определенным числом внутренних отражений.

Сделаем еще несколько замечаний. Сравнивая формулы (32) и (33) с формулами (1) и (2), находим

$$U_{-}(\xi, \xi) = f(\xi)\, g^{-1}(\xi) \tag{36}$$

и

$$U_{+}(0, \xi) = g^{-1}(\xi). \tag{37}$$

Последнее выражение позволяет переписать формулы (28) в виде

$$\begin{aligned} U_{-}(\xi, h) &= f(\xi)\, g^{-1}(h), \\ U_{+}(\xi, h) &= g(\xi)\, g^{-1}(h). \end{aligned} \tag{38}$$

Отметим также формулы, вытекающие из сравнения (26) и (27) с формулами (32) и (33),

$$U_-(\xi, h) = U_-(\xi, \xi)\, U_+(\xi, h),$$
$$U_+(0, h) = U_+(0, \xi)\, U_+(\xi, h). \tag{39}$$

В заключение покажем непосредственной подстановкой, что, как и должно быть, выражения (32) и (33) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dr/d\xi = (n'/2n)\,(1 - r^2) - 2iknr,$$
$$dt/d\xi = -(n'/2n)\, rt - iknt \tag{40}$$

(см. [1], формулы (1) и (2)). Прежде всего подстановка дает

$$dU_-(\xi, \xi)/d\xi = \Phi(\xi) - \Phi^*(\xi)\, U_-^2(\xi, \xi) \tag{41}$$

и

$$dU_+(0, \xi)/d\xi = -\Phi^*(\xi)\, U_-(\xi, \xi)\, U_+(0, \xi). \tag{42}$$

Легко видеть, что эти уравнения действительно удовлетворяются при подстановке выражений (34) и (35). В самом деле, первый член правой части в формуле (41) получается как производная первого члена разложения $U_-(\xi, \xi)$, взятая по верхнему пределу интеграла; производные же остальных членов следует брать только по нижнему пределу интегралов, поскольку производная по верхнему пределу первого интеграла обращается в нуль. Таким образом, имеем

$$dU_-(\xi, \xi)/d\xi = \Phi(\xi) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} \Phi^*(\xi)\, U_{2k-1}(\xi, \xi) U_{2m-2k+1}(\xi, \xi) =$$
$$= \Phi(\xi) - \Phi^*(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} U_{2k+1}(\xi, \xi)\, U_{2l+1}(\xi, \xi) =$$
$$= \Phi(\xi) - \Phi^*(\xi)\, U_-^2(\xi, \xi).$$

Аналогично

$$dU_+(0, \xi)/d\xi = -\Phi^*(\xi) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} U_{2k-2}(0, \xi)\, U_{2m-2k+1}(\xi, \xi) =$$
$$= -\Phi^*(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} U_{2k}(0, \xi)\, U_{2l+1}(\xi, \xi) =$$
$$= -\Phi^*(\xi)\, U_+(0, \xi)\, U_-(\xi, \xi).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сосси Л., Кард П., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 17, 41 (1968).
2. Мировицкий Д. И., Опт. и спектр., 18, № 4, 668 (1965).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
27/XI 1971

L. SOSSI, P. KARD

VALGUSE LEVIMISEST ÕHUKESES MITTEHOMOGEENSES DIELEKTRILISES KIHIS

On tuletatud uued valemid, mille kohaselt valguse peegeldumis- ja läbilaskvuskoefitsient õhukesel mittehomogeensel dielektrilisel kihil avalduvad lõpmatute koonduvate ridade kaudu (vt. (26), (27), (32) ja (33)). Eelduseks on kihi murdumisnäitaja pidevus kihi ja seda kihti ümbritsevate keskkondade lahutuspindadel. Võrreldes analoogiliste senituntud valemitega, on uutel valemitel see eelis, et ridade igal liikmel on lihtne füüsikaline tähendus: summeerimisindeksi m mingile väärtusele vastav liige (vt. valemid (24), (25), (34) ja (35)) on võrdeline m-kordse peegeldumise tulemusena tekkinud osalaine amplituudiga. Uued valemid on esitatud kahes variandis. Valemites (26) ja (27) tähendab $r(\xi)$ ξ-paksuse kihi amplituudset peegeldumis- ja $t(\xi)$ amplituudset läbilaskvuskoefitsienti. Kuid neid suurusi võib ühtlasi tõlgendada kui nn. sisemisi peegeldumis- ja läbilaskvuskoefitsienti h-paksuse kihi sisemises punktis, mille koordinaat on ξ. Valemites (32) ja (33) on h elimineeritud, mistõttu need valemid on kujult lihtsamad ja arvutusteks sobivamad.

L. SOSSI, P. KARD

ON THE PROPAGATION OF LIGHT IN A THIN INHOMOGENEOUS DIELECTRIC FILM

New formulae for the reflectance and transmittance of light by a thin inhomogeneous dielectric film in terms of infinite convergent series are deduced (s. (26), (27), (32), and (33)). It is assumed that the refractive index of the film is equal at each boundary to the refractive index of the corresponding ambient medium. In comparison with the analogous series in the previously known formulae, the new series (s. (24), (25), (34), and (35)) are more suitable because of the simple physical meaning of single terms. Namely, a term which corresponds to a fixed value of the summation index, m, is proportional to the amplitude of the partial wave generated by m-fold reflexion inside the film. The new formulae are received in two forms. In the formulae (26) and (27) $r(\xi)$ and $t(\xi)$ denote the amplitude reflectance and transmittance of a film with thickness ξ, but one can also interpret the same quantities as the so-called inner reflectance and transmittance of a film with the thickness h in an inside point with co-ordinate ξ. In the formulae (32) and (33) h is eliminated; thus these formulae are much more simple in form and more convenient for computation.