EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.2.03

УДК 535.3

П. КАРД, М. ХАЛЛИК

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ МНОГОСЛОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛЕНКОЙ

II. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Выведены общие формулы для амплитуд электромагнитных волн суммарной частоты, распространяющихся по обе стороны от многослойной нелинейной пленки, помещенной между двумя линейными средами, если из одной среды на пленку падают две плоские волны разных частот. Расчет выполнен для случая параллельной поляризации генерируемых волн.

Введение

В предыдущей статье [1] рассмотрена (в приближении заданного поля) генерация электромагнитных волн суммарной частоты многослойной нелинейной пленкой в случае перпендикулярной поляризации генерируемых волн. Ниже проведем аналогичное исследование для случая параллельной поляризации. В ссылках на формулы статьи [1] будем обозначать ее римской единицей, например, (I, 9).

Прежде всего резюмируем кратко основные обозначения статьи [1], которые будем использовать и здесь. Пленка состоит из N нелинейных слоев и помещена между линейными средами (индексы 0, $N+1$). Две плоские волны с частотами ω' и ω'' падают на пленку из 0-й среды и проходят, интерферируя в слоях, сквозь пленку, так что в каждом слое возникают прямая и обратная волны обеих частот. Их электрические амплитуды обозначаем через $\mathbf{E}'_{\pm m}$ и $\mathbf{E}''_{\pm m}$ (m — индекс слоя; «+» и «—» — индексы прямой и обратной волны соответственно). Они возбуждают в слоях нелинейную поляризацию $\mathbf{P}_m$ суммарной частоты $\omega=\omega'+\omega''$, которую можно (опуская индекс m) представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{P}=\exp[i(\omega t-knx\sin\theta)]\{&\mathbf{P}_{++}\exp(-ikn_+z\cos\theta_+)+\\+&\mathbf{P}_{--}\exp(ikn_+z\cos\theta_+)+\\+&\mathbf{P}_{+-}\exp(-ikn_-z\cos\theta_-)+\mathbf{P}_{-+}\exp(ikn_-z\cos\theta_-)\}\end{aligned}\qquad(1)$$

(см. (I, 9)). Четыре члена этой формулы соответствуют четырем членам произведения $(\mathbf{E}'_++\mathbf{E}'_-)\cdot(\mathbf{E}''_++\mathbf{E}''_-)$ (см. (I, 8)). В формуле (1) $k=\omega/c$, n — показатель преломления при частоте ω, а величины θ, $n_\pm$ и $\theta_\pm$ определяются формулами (I, 4), (I, 6) и (I, 7). Плоскость xz («плоскость падения») проходит через нормаль к пленке и вектор, равный сумме волновых векторов обеих падающих волн. Ось z перпендикулярна пленке и направлена от 0-й к $(N+1)$-й среде.

В [1] все четыре члена нелинейной поляризации были приняты перпендикулярными плоскости xz, вследствие чего и все генерируемые волны суммарной частоты поляризованы в том же направлении. Теперь примем, наоборот, что векторы $\mathbf{P}_{++}$, $\mathbf{P}_{--}$, $\mathbf{P}_{+-}$ и $\mathbf{P}_{-+}$ лежат в плоскости xz (параллельная поляризация). Все эти векторы мы считаем известными величинами, так как они зависят от нелинейных восприимчивостей слоев, которые считаем заданными, и от амплитуд $\mathbf{E}'_{\pm}$ и $\mathbf{E}''_{\pm}$, которые вычисляются обычными методами линейной теории интерференционных пленок. Электрические векторы генерируемых волн тоже лежат, очевидно, в xz-плоскости.

Решение волнового уравнения

Волновое уравнение, которому удовлетворяет электрический вектор генерируемых волн, имеет вид

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - n^2k^2\mathbf{E} = k^2\mathbf{P} \tag{2}$$

(см. [2], с. 336). Решение его в каждом из слоев состоит из шести членов

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = {} & \mathbf{e}_{+}\mathcal{E}_{+}\exp(-iknz\cos\theta) + \mathbf{e}_{-}\mathcal{E}_{-}\exp(iknz\cos\theta) + \\ & + \frac{\exp(-ikn_{+}z\cos\theta_{+})}{n_{+}^2 - n^2}\left(\mathbf{P}_{++} - \frac{n_{+}^2}{n^2}\mathbf{k}^0_{++}\mathbf{P}_{++}\cdot\mathbf{k}^0_{++}\right) + \\ & + \frac{\exp(ikn_{+}z\cos\theta_{+})}{n_{+}^2 - n^2}\left(\mathbf{P}_{--} - \frac{n_{+}^2}{n^2}\mathbf{k}^0_{--}\mathbf{P}_{--}\cdot\mathbf{k}^0_{--}\right) + \\ & + \frac{\exp(-ikn_{-}z\cos\theta_{-})}{n_{-}^2 - n^2}\left(\mathbf{P}_{+-} - \frac{n_{-}^2}{n^2}\mathbf{k}^0_{+-}\mathbf{P}_{+-}\cdot\mathbf{k}^0_{+-}\right) + \\ & + \frac{\exp(ikn_{-}z\cos\theta_{-})}{n_{-}^2 - n^2}\left(\mathbf{P}_{-+} - \frac{n_{-}^2}{n^2}\mathbf{k}^0_{-+}\mathbf{P}_{-+}\cdot\mathbf{k}^0_{-+}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

В этой формуле опущен индекс слоя и общий для всех членов и для всех сред множитель $\exp[i(\omega t - knx\sin\theta)]$. Здесь $\mathbf{e}_{\pm}$ означают единичные векторы поляризации прямой и обратной однородных волн (компоненты $\mathbf{e}_{+}$ по осям x, z равны $\cos\theta$, $-\sin\theta$, компоненты $\mathbf{e}_{-}$ $-\cos\theta$, $-\sin\theta$); $\mathbf{k}^0_{\pm\pm}$ — единичные векторы в направлении волновых векторов неоднородных волн (их компоненты по осям x, z для $\mathbf{k}^0_{++}$, $\mathbf{k}^0_{--}$, $\mathbf{k}^0_{+-}$ и $\mathbf{k}^0_{-+}$ соответственно равны $\sin\theta_{+}$, $\cos\theta_{+}$; $\sin\theta_{+}$, $-\cos\theta_{+}$; $\sin\theta_{-}$, $\cos\theta_{-}$; $\sin\theta_{-}$, $-\cos\theta_{-}$). В ограничивающих средах неоднородные волны отсутствуют; отсутствуют также прямая однородная волна в 0-й среде и обратная в $(N+1)$-й, так что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0 &= \mathbf{e}_{-0}\mathcal{E}_{-0}\exp(ikn_0z\cos\theta_0), \\ \mathbf{E}_{N+1} &= \mathbf{e}_{+N+1}\mathcal{E}_{+N+1}\exp(-ikn_{N+1}z\cos\theta_{N+1}).\end{aligned} \tag{4}$$

Амплитуды $\mathcal{E}_{-0}$ и $\mathcal{E}_{+N+1}$ являются искомыми.

Выпишем также формулу магнитного вектора. Так как он направлен по оси y, он совпадает со своей y-компонентой

$$\begin{aligned}H = {} & n\mathcal{E}_{+}\exp(-iknz\cos\theta) + n\mathcal{E}_{-}\exp(iknz\cos\theta) + \\ & + \frac{P_{++}\exp(-ikn_{+}z\cos\theta_{+})\,n_{+}\sin\beta_{++}}{n_{+}^2 - n^2} +\end{aligned}$$

$$+\frac{P_{--}\exp(ikn_+z\cos\theta_+)\,n_+\sin\beta_{--}}{n_+^2-n^2}+ \tag{5}$$

$$+\frac{P_{+-}\exp(-ikn_-z\cos\theta_-)\,n_-\sin\beta_{+-}}{n_-^2-n^2}+$$

$$+\frac{P_{-+}\exp(ikn_-z\cos\theta_-)\,n_-\sin\beta_{-+}}{n_-^2-n^2},$$

где $\beta_{\pm\pm}$ — углы между векторами $\mathbf{k}_{\pm\pm}$ и $\mathbf{P}_{\pm\pm}$, причем $\beta>0$, если произведение $\mathbf{k}\times\mathbf{P}$ параллельно оси y, и $\beta<0$, если антипараллельно.

Рекуррентная формула

Граничные условия для векторов поля на границе m-й и $(m+1)$-й сред имеют вид

$$\mathcal{E}_{+m}e^{-i\alpha_m}\cos\theta_m-\mathcal{E}_{-m}e^{i\alpha_m}\cos\theta_m+$$

$$+P_{++m}e^{-i\alpha_{+m}}\left(\frac{\cos\theta_{+m}\sin\beta_{++m}}{n_{+m}^2-n_m^2}-\frac{\sin\theta_{+m}\cos\beta_{++m}}{n_m^2}\right)+$$

$$+P_{--m}e^{i\alpha_{+m}}\left(-\frac{\cos\theta_{+m}\sin\beta_{--m}}{n_{+m}^2-n_m^2}-\frac{\sin\theta_{+m}\cos\beta_{--m}}{n_m^2}\right)+$$

$$+P_{+-m}e^{-i\alpha_{-m}}\left(\frac{\cos\theta_{-m}\sin\beta_{+-m}}{n_{-m}^2-n_m^2}-\frac{\sin\theta_{-m}\cos\beta_{+-m}}{n_m^2}\right)+$$

$$+P_{-+m}e^{i\alpha_{-m}}\left(-\frac{\cos\theta_{-m}\sin\beta_{-+m}}{n_{-m}^2-n_m^2}-\frac{\sin\theta_{-m}\cos\beta_{-+m}}{n_m^2}\right)=$$

$$=\mathcal{E}_{+m+1}\cos\theta_{m+1}-\mathcal{E}_{-m+1}\cos\theta_{m+1}+ \tag{6}$$

$$+P_{++m+1}\left(\frac{\cos\theta_{+m+1}\sin\beta_{++m+1}}{n_{+m+1}^2-n_{m+1}^2}-\frac{\sin\theta_{+m+1}\cos\beta_{++m+1}}{n_{m+1}^2}\right)+$$

$$+P_{--m+1}\left(-\frac{\cos\theta_{+m+1}\sin\beta_{--m+1}}{n_{+m+1}^2-n_{m+1}^2}-\frac{\sin\theta_{+m+1}\cos\beta_{--m+1}}{n_{m+1}^2}\right)+$$

$$+P_{+-m+1}\left(\frac{\cos\theta_{-m+1}\sin\beta_{+-m+1}}{n_{-m+1}^2-n_{m+1}^2}-\frac{\sin\theta_{-m+1}\cos\beta_{+-m+1}}{n_{m+1}^2}\right)+$$

$$+P_{-+m+1}\left(-\frac{\cos\theta_{-m+1}\sin\beta_{-+m+1}}{n_{-m+1}^2-n_{m+1}^2}-\frac{\sin\theta_{-m+1}\cos\beta_{-+m+1}}{n_{m+1}^2}\right)$$

и

$$\mathcal{E}_{+m}n_me^{-i\alpha_m}+\mathcal{E}_{-m}n_me^{i\alpha_m}+$$

$$+\frac{P_{++m}n_{+m}\sin\beta_{++m}e^{-i\alpha_{+m}}}{n_{+m}^2-n_m^2}+\frac{P_{--m}n_{+m}\sin\beta_{--m}e^{i\alpha_{+m}}}{n_{+m}^2-n_m^2}+$$

$$+\frac{P_{+-m}n_{-m}\sin\beta_{+-m}e^{-i\alpha_{-m}}}{n_{-m}^2-n_m^2}+\frac{P_{-+m}n_{-m}\sin\beta_{-+m}e^{i\alpha_{-m}}}{n_{-m}^2-n_m^2}=$$

$$= \mathcal{E}_{+m+1}n_{m+1} + \mathcal{E}_{-m+1}n_{m+1} + \tag{7}$$
$$+ \frac{P_{++m+1}n_{+m+1}\sin\beta_{++m+1}}{n^2_{+m+1} - n^2_{m+1}} + \frac{P_{--m+1}n_{+m+1}\sin\beta_{--m+1}}{n^2_{+m+1} - n^2_{m+1}} +$$
$$+ \frac{P_{+-m+1}n_{-m+1}\sin\beta_{+-m+1}}{n^2_{-m+1} - n^2_{m+1}} + \frac{P_{-+m+1}n_{-m+1}\sin\beta_{-+m+1}}{n^2_{-m+1} - n^2_{m+1}}.$$

Здесь α_m и $\alpha_{\pm m}$ определены, как в (I, 12). Чтобы выразить граничные условия в матричном виде, введем матрицы A, $P_\pm$, $M(\alpha)$ и $G(v)$ согласно (I, 15)—(I, 18). Но величины v_{ik} и $v_{\pm ik}$ определяются теперь иначе, чем в (I, 19), где они определены в соответствии с принятой перпендикулярной поляризацией. А в случае параллельной поляризации

$$\left.\begin{aligned} v_{ik} &= \frac{1}{2}\ln\frac{n_k\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_k}, \\ v_{\pm ik} &= \frac{1}{2}\ln\frac{n_{\pm k}\cos\theta_i}{n_i\cos\theta_{\pm k}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Кроме того, в случае параллельной поляризации нужно ввести матрицы

$$\begin{aligned} C_{\pm ik} = G(v_{\pm ik})\begin{pmatrix}\sin\beta_{+\pm k} & 0 \\ 0 & \sin\beta_{-\mp k}\end{pmatrix} + \\ + e^{-v_{ik}}\operatorname{sh} v_{\pm kk}\tan(\theta_k + \theta_{\pm k})\begin{pmatrix}-1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta_{+\pm k} & 0 \\ 0 & \cos\beta_{-\mp k}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

Важно отметить, что матрицы $C_{\pm ik}$ являются в некотором смысле обобщением матриц $G_{\pm ik} \equiv G(v_{\pm ik})$. Именно, при всех β, равных $\pi/2$, имеем $C_{\pm ik} = G_{\pm ik}$. Кроме того, сходство $C_{\pm ik}$ и $G_{\pm ik}$ выражается в том, что аналогично известной формуле

$$G(v_{ik})\,G(v_{\pm kl}) = G(v_{\pm il})$$

справедлива также, как легко проверить, формула

$$G(v_{ik})\,C_{\pm kl} = C_{\pm il}. \tag{10}$$

Вводя все эти обозначения в граничные условия (6) и (7) и учитывая формулу (I, 7), получаем после довольно громоздких выкладок следующую матричную формулу:

$$\begin{aligned} A_m = M(\alpha_m)\,[\,G(v_{m,m+1})A_{m+1} + C_{+m,m+1}P_{+m+1} + C_{-m,m+1}P_{-m+1} - \\ - C_{+mm}M(-\alpha_{+m})P_{+m} - C_{-mm}M(-\alpha_{-m})P_{-m}]. \end{aligned} \tag{11}$$

Эта формула отличается от аналогичной формулы (I, 20) только заменой во всех, кроме первого, членах правой части матриц G на соответствующие матрицы C. Как и в (I, 21)—(I, 23), мы можем ее упростить. Положив

$$B_m \equiv A_m + M(\alpha_m)\,C_{+mm}M(-\alpha_{+m})P_{+m} + M(\alpha_m)\,C_{-mm}M(-\alpha_{-m})P_{-m}, \tag{12}$$

находим (с учетом (10))

$$B_m = M(\alpha_m)\,G(v_{m,m+1})\,(B_{m+1} + H_{m+1}), \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} H_m = [\,C_{+mm} - M(\alpha_m)\,C_{+mm}M(-\alpha_{+m})\,]P_{+m} + \\ + [\,C_{-mm} - M(\alpha_m)\,C_{-mm}M(-\alpha_{-m})\,]P_{-m}. \end{aligned} \tag{14}$$

Окончательные формулы

Ход дальнейших вычислений совершенно одинаков для обеих поляризаций. Отличны только выражения матрицы H_m (I, 23) и (14) (и, конечно, определения величин v_{ik} и $v_{\pm ik}$); но вид всех формул, в которые входят матрицы H_m, один и тот же. Таким образом, как и в [1], имеем

$$A_0 = F_{0,N+1} A_{N+1} + H_{1N}, \tag{15}$$

где

$$H_{1N} = \sum_{k=1}^{N} F_{0k} H_k \tag{16}$$

и

$$F_{0k} = G(v_{01}) M(\alpha_1) G(v_{12}) M(\alpha_2) \ldots M(\alpha_{k-1}) G(v_{k-1,k}). \tag{17}$$

Окончательный результат дается формулами

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}_{-0} &= \frac{H_2 - rH_1}{\sqrt{n_0} \cos\theta_0}, \\ \mathcal{E}_{+N+1} &= \frac{H_1 d}{\sqrt{n_{N+1}} \cos\theta_{N+1}} \end{aligned}\right. \tag{18}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{H_2 - H_1 r}{\sqrt{H_1 H_1^* + H_2 H_2^* - rH_1 H_2^* - r^* H_1^* H_2}}, \\ \delta &= \frac{H_1 d}{\sqrt{H_1 H_1^* + H_2 H_2^* - rH_1 H_2^* - r^* H_1^* H_2}}, \end{aligned}\right. \tag{19}$$

где H_1, H_2 — элементы матрицы H_{1N} и

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{F_{21}}{F_{11}}, \\ d &= \frac{1}{F_{11}} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

суть коэффициенты отражения и пропускания пленки без учета нелинейностей слоев (F_{11}, F_{21} — элементы матрицы $F_{0,N+1}$). Величины ϱ и δ в формулах (19) определяют относительные доли интенсивности пучков света суммарной частоты в 0-й среде (доля $\varrho\varrho^*$) и $(N+1)$-й среде (доля $\delta\delta^*$). Полная же интенсивность обоих пучков, исходящих из единицы площади пленки, равна

$$\begin{aligned} I &= |\mathcal{E}_{-0}|^2 n_0 \cos\theta_0 + |\mathcal{E}_{+N+1}|^2 n_{N+1} \cos\theta_{N+1} = \\ &= H_1 H_1^* + H_2 H_2^* - rH_1 H_2^* - r^* H_1^* H_2. \end{aligned} \tag{21}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Халлик М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 148 (1971).
2. Бломберген Н., Нелинейная оптика, М., 1966

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
12/X 1971

P. KARD, M. HALLIK

MITMEKIHILISE MITTELINEAARSE KILE POOLT GENEREERITUD SUMMAARSE SAGEDUSEGA ELEKTROMAGNETILISTE LAINETE ARVUTUS

II. Paralleelpolarisatsioon

Töös [1] on arvutatud etteantud välja lähenduses mitmekihilise mittelineaarse kile poolt genereeritud summaarse sagedusega elektromagnetilised lained nende ristpolarisatsiooni korral. Sama meetodit rakendatakse käesolevas töös paralleelpolarisatsiooni juhul. Tulemused on esitatud valemites (18), (19) ja (21). Väliselt on nad identsed töös [1] saadud tulemustega; samakujuline on ka maatriksi H_{1N} avaldis (16), kuid maatriksite H_m valem (14) on teistsugune. Valemites (18), (19) ja (21) on $\mathcal{E}_{-0}$ ja $\mathcal{E}_{+N+1}$ kilet piiravates keskkondades genereeritud summaarse sagedusega lainete amplituudid, $\varrho\varrho^*$ ja $\delta\delta^*$ nende intensiivsuste suhtarvud ja I nende summaarne intensiivsus; r ja d on kile amplituudsed peegeldumis- ja läbilaskvuskoefitsiendid mittelineaarsuse puudumise korral, n_0, n_{N+1} — piiravate keskkondade murdumisnäitajad ja θ_0, θ_{N+1} — nurgad, mille all levivad nendes genereeritud lained.

P. KARD, M. HALLIK

BERECHNUNG DER ELEKTROMAGNETISCHEN WELLEN SUMMARISCHER FREQUENZ, DIE VON EINER MEHRSCHICHTIGEN NICHTLINEAREN LAMELLE ERZEUGT WERDEN

II. Parallele Polarisation

In voriger Arbeit [1] wurden in der Annäherung des gegebenen Feldes senkrecht polarisierte elektromagnetische Wellen summarischer Frequenz berechnet, die von einer mehrschichtigen nichtlinearen Lamelle erzeugt werden. In vorliegender Arbeit wird nach derselben Methode der Fall der parallelen Polarisation betrachtet. Das Ergebnis ist in Formeln (18), (19) und (21) dargestellt. Diese Formeln sind äußerlich mit den entsprechenden Formeln der Arbeit [1] identisch. Auch der Ausdruck (16) für die Matrix H_{1N} ist von gleicher Gestalt, doch die Formel (14) für die Matrizen H_m ist unterschiedlich. In den Formeln (18), (19) und (21) bedeuten $\mathcal{E}_{-0}$ und $\mathcal{E}_{+N+1}$ die Amplituden der beiderseits der Lamelle in den begrenzenden Medien erzeugten Wellen, $\varrho\varrho^*$ und $\delta\delta^*$ sind deren relative Intensitäten und I die gesamte Intensität. r ist der Spiegelungs- und d der Durchlasskoeffizient der Lamelle im linearen Bereich, n_0 und n_{N+1} sind die Brechzahlen der begrenzenden Medien, θ_0 und θ_{N+1} die Winkel, unter denen die erzeugten Wellen sich verbreiten.