EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.2.02

УДК 519.21 + 519.3

*Э. РАЙК*

# О ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ФУНКЦИОНАЛАМИ ВЕРОЯТНОСТИ И КВАНТИЛЯ

**1.** Решения задач стохастического программирования можно искать или в детерминированном виде, или в виде функций случайных параметров [1]. В последнем случае обычно вид решения задается заранее определенной функцией и искомыми считаются лишь некоторые коэффициенты [2]. После этого решение (вектора коэффициентов искомой функции) ищется в детерминированном виде.

Если решение задачи стохастического программирования искать в виде функции случайных параметров, не задавая заранее вида функции [3], то возникает вопрос выбора класса функций, среди которых ищется решение. Этот класс функций разумно отождествить с некоторым функциональным пространством. При этом, в частности, надо определить условия существования решений в тех или иных пространствах. Основным средством здесь является теорема Вейерштрасса, которая утверждает, что полунепрерывный (слабо полунепрерывный) сверху функционал достигает максимума на компактном замкнутом (слабо компактном слабо замкнутом) множестве. Для замкнутости множества, заданного функционалом $\{x : v(x) \geqslant a\}$ ($a$ — действительное число), достаточно, чтобы функционал $v(x)$ был полунепрерывным сверху (п.-н. св.). Соответственно множество $\{x : v(x) \leqslant a\}$ замкнуто, если функционал $v(x)$ является полунепрерывным снизу (п.-н. сн.). Следовательно, условия существования решения в задачах программирования тесно связаны с условиями полунепрерывности функционалов независимо от того, является ли функционал критерием качества или этим функционалом задается ограничение. Поскольку полунепрерывность интегральных функционалов, соответствующих операциям взятия математического ожидания, исследованы многими авторами (см., напр., [4]), то мы свое внимание сосредоточим на функционалах вероятности и квантиля.

**2.** Рассмотрим функцию $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant \gamma]$. Здесь $\xi$ — случайный вектор с заданным распределением; $f(x, \xi)$ — действительная функция конечномерных векторов $x$ и $\xi$, определенная на $R^m \times R^k$; $\gamma$ — действительное число; $P$ — вероятность.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, \xi)$ является п.-н. св. по $x$ для п. в. (почти всех) $\xi$ и измеримой по $\xi$ для всех $x$, тогда функция $v(x) = P[f(x, \xi) \geqslant \gamma]$ п.-н. св.*

Доказательство. Определим функции

$$X_n(\xi) = \begin{cases} 1, & f(x_n, \xi) \geqslant \gamma, \\ 0, & f(x_n, \xi) < \gamma \end{cases} \quad \text{и} \quad X(\xi) = \begin{cases} 1, & f(x, \xi) \geqslant \gamma, \\ 0, & f(x, \xi) < \gamma, \end{cases}$$

которые являются измеримыми по измеримости функции $f(x,\xi)$. Пусть сходится последовательность $x_n \to x$, тогда для п. в. $\xi$ $\overline{\lim} f(x_n,\xi) \leqslant f(x,\xi)$, и поэтому на множестве $\{\xi : f(x,\xi) < \gamma\}$ при п. в. $\xi$ $X_n(\xi) \to X(\xi)$. По теореме Лебега ([5], с. 168) имеем

$$\lim \int\limits_{f(x,\xi)<\gamma} X_n(\xi)\,dP(\xi) = \lim \int\limits_{f(x,\xi)<\gamma} X_n\,dP(\xi) = \int\limits_{f(x,\xi)<\gamma} X(\xi)\,dP(\xi). \quad (1)$$

Для тех $\xi$, которые удовлетворяют неравенству $f(x,\xi) \geqslant \gamma$, $X_n(\xi)$ могут и не сходиться к $X(\xi)$, и поскольку на этом множестве $X(\xi) = 1$, то имеем

$$\overline{\lim} \int\limits_{f(x,\xi)\geqslant\gamma} X_n(\xi)\,dP(\xi) \leqslant \int\limits_{f(x,\xi)\geqslant\gamma} X(\xi)\,dP(\xi). \quad (2)$$

Согласно соотношениям (1), (2) получаем

$$\overline{\lim}\, v(x_n) \leqslant \overline{\lim} \int\limits_{f(x,\xi)\geqslant\gamma} X_n(\xi)\,dP(\xi) + \lim \int\limits_{f(x,\xi)<\gamma} X_n(\xi)\,dP(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{f(x,\xi)\geqslant\gamma} X(\xi)\,dP(\xi) + \int\limits_{f(x,\xi)<\gamma} X(\xi)\,dP(\xi) = v(x),$$

т. е. $v(x)$ п.-н. св.

Дальнейшие теоремы существенно опираются на следующую лемму.

Л е м м а 1. *Функционал $v_\gamma(z) = P[z(\xi) \geqslant \gamma]$ п.-н. св. относительно сходимости $z(\xi)$ по вероятности. Если дополнительно $P[z(\xi) = \gamma] = 0$, то функционал $v_\gamma(z)$ непрерывен в точке $z(\xi)$ относительно сходимости по вероятности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $z_n(\xi)$ сходится по вероятности к $z(\xi)$. По определению для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует $N$ такое, что для $n \geqslant N$

$$P[|z_n(\xi) - z(\xi)| \geqslant \delta] \leqslant \varepsilon. \quad (3)$$

Функционал $v_\gamma(z)$ — невозрастающий по $\gamma$ и непрерывный слева по $\gamma$. Из неравенства (3) имеем

$$v_\gamma(z_n) = P[z_n(\xi) \geqslant \gamma] \leqslant P[z(\xi) \geqslant \gamma - \delta] + \varepsilon.$$

Поскольку $\delta$ и $\varepsilon$ произвольны, а $v_\gamma(z)$ непрерывен слева по $\gamma$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, v_\gamma(z_n) \leqslant v_\gamma(z)$, т. е. $v_\gamma(z)$ полунепрерывен сверху.

Если переписать соотношение (3) в виде

$$P[z(\xi) \geqslant \gamma + \delta] - \varepsilon \leqslant v(z_n) \leqslant P[z(\xi) \geqslant \gamma - \delta] + \varepsilon$$

и дополнительно предположить, что $P[z(\xi) = \gamma] = 0$, то $v_\gamma(z)$ становится непрерывным и справа по $\gamma$. Тогда при $n \to \infty$ получаем, что $v_\gamma(z_n) \to v_\gamma(z)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $f(x,\xi)$ непрерывна по $x$ для п. в. $\xi$ и измерима по $\xi$ для всех $x$ и $P[f(x,\xi) = \gamma] = 0$. Тогда функция $v(x) = P[f(x,\xi) \geqslant \gamma]$ непрерывна в точке $x$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сходится последовательность $x_n \to x$, тогда для п. в. $\xi$ $\lim f(x_n,\xi) = f(x,\xi)$, и поэтому $f(x_n,\xi)$ сходится к $f(x,\xi)$ и по вероятности. Но тогда по доказанной лемме 1 функция $v(x)$ непрерывна.

Будем теперь исследовать функционал вероятности $v(x) = P[f(x(\xi),\xi) \geqslant \gamma]$, где $x(\xi)$ — элемент некоторого функционального пространства. Здесь возникает необходимость потребовать, чтобы функция суперпозиции $f(x(\xi),\xi)$ была измеримой. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы функция $f(x,\xi)$ удовлетворяла условию Каратеодори, т. е. была бы непрерывной по $x$ для п. в. $\xi$ и измеримой по $\xi$ для всех $x$.

Исследуем ниже непрерывность вероятностного функционала в пространствах $C$, $L_p$ и в метрическом пространстве непрерывных функций $C_\rho$ с метрикой

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}, \quad \text{где} \quad \|h\|_n=\max_{\|t\|_{R^m}\leqslant n}|h(t)|.$$

Теорема 3. *Пусть функция $f(x,\xi)$ непрерывна по $x$ для п. в. $\xi$ и измерима по $\xi$ для всех $x$. Тогда функционал $v(x)=P[f(x(\xi),\xi)\geqslant\gamma]$ слабо п.-н. св. в пространстве $C$ и п.-н. св. в пространствах $L_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и $C_\rho$. Если дополнительно $P[f(x(\xi),\xi)=\gamma]=0$, то $v(x)$ слабо непрерывен в пространстве $C$ и непрерывен в пространствах $L_p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, и $C_\rho$ в точке $x(\xi)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $x_n(\xi)$ сходится к $x(\xi)$ в пространстве $C_\rho$ или слабо сходится в пространстве $C$. Тогда $x_n(\xi)\to x(\xi)$ для всех $\xi$ и, следовательно, $x_n(\xi)\to x(\xi)$ по вероятности. Сходимость $x_n(\xi)\to x(\xi)$ в пространстве $L_\infty$ означает, что $x_n(\xi)\to x(\xi)$ для п. в. $\xi$, и отсюда следует сходимость $x_n(\xi)\to x(\xi)$ по вероятности. Из сходимости в пространствах $L_p$, $1\leqslant p<\infty$, также следует сходимость по вероятности. Итак, пусть $x_n(\xi)\to x(\xi)$ по вероятности. Тогда по [6] (см. лемму 17.5 на с. 346) $f(x_n(\xi),\xi)\to f(x(\xi),\xi)$ по вероятности. Откуда по лемме 1 следует утверждение теоремы.

Более сложно обстоит дело с условиями полунепрерывности и непрерывности относительно слабой сходимости в пространствах $L_p$. Например, функционал $v(x)=P[x(\xi)\geqslant\gamma]$ не является слабо полунепрерывным ни сверху, ни снизу в пространствах $L_p$.

3. Перейдем к изучению свойств функции и функционала квантиля, где функция квантиля имеет вид $w_\alpha(x)=\max\{y\in R^1; P[f(x,\xi)\geqslant y]\geqslant\alpha\}$, $0<\alpha\leqslant 1$, а функционал квантиля выражается формулой $w_\alpha(x)=\max\limits_y\{y\in R^1; P[f(x(\xi),\xi)\geqslant y]\geqslant\alpha\}$, $0<\alpha\leqslant 1$. Здесь $x(\xi)$ — элемент некоторого функционального пространства. Если мы ниже говорим о функционале $w_\alpha(x)$ в пространстве $R^m$, то подразумеваем первую формулу. Операция максимизации здесь оправдана, так как функционал $P[f(x(\xi),\xi)\geqslant y]$ — невозрастающий и непрерывный слева по $y$.

Отметим, что условие $w_\alpha(x)\geqslant\gamma$ эквивалентно условию $v_\gamma(x)\geqslant\alpha$, где $v_\gamma(x)=P[f(x,\xi)\geqslant\gamma]$. Действительно, если $w_\alpha(x)\geqslant\gamma$, то

$$\alpha\leqslant P[f(x,\xi)\geqslant w_\alpha(x)]\leqslant P[f(x,\xi)\geqslant\gamma],$$

или $\alpha\leqslant v_\gamma(x)$. Наоборот, пусть выполняется условие $v_\gamma(x)=P[f(x,\xi)\geqslant\gamma]\geqslant\alpha$, и поскольку $w_\alpha(x)$ — максимальное число, для которого выполняется данное неравенство, то $w_\alpha(x)\geqslant\gamma$.

Доказанная эквивалентность условий позволяет сформулировать следующую лемму.

Лемма 2. *Функционал $w_\alpha(x)$ п.-н. св. по $x$ для любого $\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, тогда и только тогда, когда $v_\gamma(x)$ п.-н. св. по $x$ для любого $\gamma$.*

Доказательство. Пусть $v_\gamma(x)$ п.-н. св. по $x$ для любого $\gamma$. Тогда множества, заданные условиями $v_\gamma(x)\geqslant\alpha$, замкнуты для любых $\alpha$ и $\gamma$ и в силу эквивалентности условий множества, заданные условиями $w_\alpha(x)\geqslant\gamma$, замкнуты для любого $\gamma$; следовательно, $w_\alpha(x)$ п.-н. св. по $x$. Обратное утверждение доказывается аналогично.

В качестве следствий из лемм 1, 2 и теорем 1, 3 вытекают следующие лемма 3 и теоремы 4, 5.

Лемма 3. *Функционал* $w_\alpha(z) = \max\{y \in R^1; P[z(\xi) \geqslant y] \geqslant \alpha\}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *п.-н. св. относительно сходимости по вероятности.*

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x, \xi)$ *является п.-н. св. по* $x$ *для почти всех* $\xi$ *и измеримой по* $\xi$ *для всех* $x$. *Тогда функция* $w_\alpha(x)$ *п.-н. св. по* $x$ *в пространстве* $x \in R^m$.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(x, \xi)$ *является непрерывной по* $x$ *для п. в.* $\xi$ *и измеримой по* $\xi$ *для всех* $x$. *Тогда функционал* $w_\alpha(x)$ *слабо п.-н. св. в пространстве* $C$ *и п.-н. св. в пространствах* $L_p$, $1 < p \leqslant \infty$, *и* $C_\rho$.

Для установления непрерывности функционала квантиля в пространствах $R^m$, $C$, $L_p$ и $C_\rho$ предпошлем две леммы.

Лемма 4. *Функционал* $w_\alpha(z) = \max\{y \in R^1; P[z(\xi) \geqslant y] \geqslant \alpha\}$ *непрерывен относительно равномерной сходимости.*

Доказательство. Пусть $z_n(\xi)$ сходится к $z(\xi)$ равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ $|z_n(\xi) - z(\xi)| \leqslant \varepsilon$ при достаточно больших $n$. Тогда

$$P[z_n(\xi) \geqslant w_\alpha(z) - \varepsilon] \geqslant P[z(\xi) \geqslant w_\alpha(z)] \geqslant \alpha$$

и

$$P[z(\xi) \geqslant w_\alpha(z_n) - \varepsilon] \geqslant P[z_n(\xi) \geqslant w_\alpha(z_n)] \geqslant \alpha.$$

По определению функционала $w_\alpha(z)$

$$w_\alpha(z_n) \geqslant w_\alpha(z) - \varepsilon, \quad w_\alpha(z) \geqslant w_\alpha(z_n) - \varepsilon,$$

т. е. $w_\alpha(z)$ непрерывен.

Лемма 5. *Пусть функция* $f(x, \xi)$ *непрерывна по совокупности* $(x, \xi) \in R^m \times R^k$, *некоторая гауссова мера абсолютно непрерывна относительно меры случайной величины* $\xi$ *и функция* $x(\xi)$ *непрерывна. Тогда функционал* $w_\alpha(x)$ $(0 < \alpha < 1)$ *непрерывен в точке* $x$ *относительно сходимости по вероятности.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из того, что некоторая гауссова мера абсолютно непрерывна относительно меры случайной величины $\xi$ и функция суперпозиции $f(x(\xi), \xi)$ непрерывна, для $\alpha < 1$ следует

$$P[f(x(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x) - \varepsilon] \geqslant P[f(x(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x)] + \delta \geqslant \alpha + \delta. \quad (4)$$

Рассмотрим последовательность $x_n(\xi)$, сходящуюся к $x(\xi)$ по вероятности. Тогда для фиксированных $\varepsilon$ и $\delta$ существует $N$ такое, что для $n \geqslant N$

$$P[f(x_n(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x) - 2\varepsilon] \geqslant P[f(x(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x) - \varepsilon] - \delta.$$

Из неравенства (4), в свою очередь, получаем

$$P[f(x(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x) - \varepsilon] - \delta \geqslant P[f(x(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x)] \geqslant \alpha.$$

Таким образом, $P[f(x_n(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x) - 2\varepsilon] \geqslant \alpha$.

По определению квантиля $w_\alpha(x_n) \geqslant w_\alpha(x) - 2\varepsilon$, т. е. функционал $w_\alpha(x)$ п.-н. сн. Но по лемме 3 $w_\alpha(x)$ также п.-н. св. относительно сходимости по вероятности.

Теорема 6. *Пусть функция* $f(x, \xi)$ *непрерывна по совокупности векторов* $(x, \xi)$, *и пересечение множеств* $Q \cap M$ *ограничено, где* $Q = \{\xi : f(x(\xi), \xi) \geqslant w_\alpha(x)\}$ *и* $M$ — *множество, на котором сосредоточена случайная величина* $\xi (P[\xi \in M] = 1)$. *Тогда функционал* $w_\alpha(x)$ *непрерывен в пространствах* $C$, $R^m$ *и* $C_\rho$.

Доказательство. На множестве $Q \cap M$ последовательность $f(x_n(\xi), \xi)$ сходится равномерно, если $x_n(\xi)$ сходится в пространствах $C$, $R^m$ или $C_\rho$. По лемме 4 получаем непрерывность функционала $w_\alpha(x)$.

Теорема 7. *Пусть функция $f(x, \xi)$ непрерывна по $(x, \xi) \in R^m \times R^k$ и некоторая гауссова мера абсолютно непрерывна относительно меры случайной величины $\xi$. Тогда функционал $w_\alpha(x)$ слабо непрерывен в пространстве $C$ и непрерывен в пространствах $R^m$ и $C_\rho$ для $\alpha < 1$.*

*Если дополнительно $x(\xi) \in L_p$ непрерывна, то функционал $w_\alpha(x)$ непрерывен в точке $x(\xi)$ пространства $L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Доказательство. Сходимость в пространствах $L_p$, $C_\rho$ и $R^m$ и слабая сходимость в $C$ влекут за собой сходимость по вероятности, как показано в доказательстве теоремы 3. По лемме 5 получаем утверждение теоремы.

4. Полученные условия полунепрерывности и непрерывности переносятся и на другие функционалы вероятности и квантиля. Воспользуемся формулами

$$P[f(x(\xi), \xi) < \gamma] = 1 - P[f(x(\xi), \xi) \geqslant \gamma] = 1 - v(x),$$
$$P[f(x(\xi), \xi) \leqslant \gamma] = P[-f(x(\xi), \xi) \geqslant -\gamma].$$

Аналогичные связи имеются между различными функционалами квантиля:

$$\min\{y \in R^1; P[f(x(\xi), \xi) \leqslant y] \geqslant \alpha\} =$$
$$= \max\{y \in R^1; P[-f(x(\xi), \xi) \geqslant y] \geqslant \alpha\},$$
$$\min\{y \in R^1; P[f(x(\xi), \xi) > y] \leqslant \alpha\} =$$
$$= \max\{y \in R^1; P[-f(x(\xi), \xi) \geqslant y] \geqslant 1 - \alpha\},$$
$$\max\{y \in R^1; P[f(x(\xi), \xi) < y] \leqslant \alpha\} =$$
$$= \max\{y \in R^1; P[f(x(\xi), \xi) \geqslant y] \geqslant 1 - \alpha\}.$$

Используя эти формулы и доказанные теоремы, составим следующую таблицу.

| Свойства функции $f(x, \xi)$ | Полунепрерывные сверху функционалы по $x$ | Полунепрерывные снизу функционалы по $x$ |
|---|---|---|
| $f(x, \xi)$ п.-н. св. по $x$ | $P[f(x, \xi) \geqslant \gamma]$; $\max\{y \in R^1; P[f(x, \xi) \geqslant y] \geqslant \alpha\}$; $\max\{y \in R^1; P[f(x, \xi) < y] \leqslant \alpha\}$ | $P[f(x, \xi) < \gamma]$ |
| $f(x, \xi)$ п.-н. сн. по $x$ | $P[f(x, \xi) \leqslant \gamma]$ | $P[f(x, \xi) > \gamma]$; $\min\{y \in R^1; P[f(x, \xi) \leqslant y] \geqslant \alpha\}$; $\min\{y \in R^1; P[f(x, \xi) > y] \leqslant \alpha\}$. |

Для существования решения в задаче программирования требуется еще компактность множества, на котором ищется решение. Различные критерии компактности и слабой компактности в функциональных пространствах хорошо изучены (см., напр., их сводку в [5], глава IV). Приведем еще один критерий.

Компактность в $C_\rho$. Для компактности множества $T \subset C_\rho$ необходимо и достаточно, чтобы функции $x(\xi) \subset T$ удовлетворяли условиям Арцела—Асколи на любом ограниченном замкнутом множестве по $\xi$.

Достаточность. Действительно, для заданного $\varepsilon$ найдется $N$ такое, что $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leqslant \varepsilon/2$ и по критерию Арцела—Асколи на множестве $\|\xi\| \leqslant N$ существует $\varepsilon/2$-сеть $x_i(\xi)$, $i = 1, \ldots, k$, по норме $\|x(\xi)\|_N = \max\limits_{\|\xi\| \leqslant N} |x(\xi)|$.

Продолжая функции $x_i(\xi)$ на все пространство непрерывным образом, получим $\varepsilon$-сеть в пространстве $C_\rho$ для множества $T$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x_i(\xi)-x(\xi)\|_n}{1+\|x_i(\xi)-x(\xi)\|_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\|x_i(\xi)-x(\xi)\|_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leqslant \varepsilon.$$

Необходимость. Пусть $T$ — компактное множество пространства $C_\rho$ и $Q$ — некоторое ограниченное множество элементов $\xi$. Выберем $N$ такое, что для всех $\xi \in Q$, $\|\xi\| \leqslant N$ и для компактного множества $T$ из пространства $C_\rho$ выберем $2^{-N}\varepsilon$-сеть $\{x_i(\xi),\ i=1, \ldots, k\}$, где $\varepsilon < 1/2$. Тогда

$$2^{-N}\varepsilon \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x_i(\xi)-x(\xi)\|_n}{1+\|x_i(\xi)-x(\xi)\|_n} > 2^{-N} \frac{\|x_i(\xi)-x(\xi)\|_N}{1+\|x_i(\xi)-x(\xi)\|_N}.$$

Отсюда $\max\limits_{\xi\in Q}|x_i(\xi)-x(\xi)| \leqslant \|x_i(\xi)-x(\xi)\|_N < \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon$, т. е. $\{x_i(\xi),\ i=1, \ldots, k\}$ — $2\varepsilon$-сеть по метрике пространства $C(Q)$. Функции $x(\xi) \subset T$ на множестве $Q$ удовлетворяют условиям Арцела—Асколи.

5. Согласно полученным результатам можно сделать некоторые общие замечания относительно разных задач стохастического программирования, содержащих функционалы вероятности и квантиля.

Полунепрерывность функций вероятности и квантиля в пространстве $x \in R^m$ получается при весьма слабых ограничениях на функцию $f(x, \xi)$ и, что самое главное, вообще не зависит от распределения случайной величины $\xi$ (теоремы 1 и 4). Установить полунепрерывность в ту или иную сторону можно при помощи приведенной выше таблицы.

Для установления непрерывности этих функционалов требуется накладывать условия еще на распределение случайной величины (теоремы 2, 6 и 7). Эти условия, вообще говоря, не очень стеснительны при $x \in R^m$. Например, условие теоремы 2 $P[f(x,\xi)=0]$ выполняется, если мера Лебега множества $\{\xi : f(x,\xi)=0\}$ равняется нулю и мера (вероятность) случайной величины $\xi$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е. вероятность того, что случайная величина принадлежит некоторому множеству нулевой меры Лебега, равняется нулю. Условие $P[f(x,\xi)=0]$ выполняется, например, для любой полиномиальной по $\xi$ функции и для случайной величины с нормальным распределением

Условие теоремы 7, требующее, чтобы некоторая гауссова мера была абсолютно непрерывной относительно меры (вероятности) случайной величины $\xi$, можно заменить условием, что вероятность принадлежности случайной величины открытому множеству положительна. Это условие опять-таки выполняется для нормального распределения случайной величины $\xi$.

Если решение ищется как функция случайной величины, то возникает вопрос выбора функционального пространства. Сравнивая критерий компактности в рассмотренных пространствах и условия теорем 3, 5—7, можно при распределенных на неограниченных множествах случайных величинах отдать предпочтение пространству $C_\rho$. В этом пространстве условия компактности наиболее слабые.

Если случайная величина распределена на ограниченном множестве $S$, то удобнее работать в пространстве $C(S)$. Тогда компактные множества в пространствах $C(S)$ и $C_\rho$ совпадают, а норма пространства $C(S)$ выражается проще, чем метрика пространства $C_\rho$.

Условия компактности и непрерывности функционала квантиля и вероятности в пространствах $L_p$ трудно удовлетворить в задачах стохастического программирования с функционалами квантиля и вероятности, и это затрудняет использование пространства $L_p$.

Полунепрерывность функционалов квантиля и вероятности в функциональных пространствах также получается при слабо ограничительных условиях. В частности, отсутствуют ограничения на распределение случайной величины. Определить полунепрерывность в ту или иную сторону можно при помощи таблицы, приведенной выше. Припомним только, что непрерывная по $x$ функция $f(x, \xi)$ является одновременно полунепрерывной снизу и сверху по $x$. Для установления непрерывности функционалов квантиля и вероятности накладываются дополнительные условия на распределение случайной величины (теоремы 3, 6, 7).

Автор весьма благодарен И. Петерсену, Т. Тобиасу и Р. Тавасту за ценные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б., Выбор решений в сложных ситуациях. Изв. АН СССР, Техн. киберн., № 2, 9 (1970).
2. Charnes A., Cooper W. W., Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints. Operat. Res., **11**, No. 1, 18 (1963).
3. Юдин Д .Б., Об одном классе стохастического программирования. ДАН СССР, **117**, № 6 (1967).
4. Поляк Б. Т., Полунепрерывность интегральных функционалов и теоремы существования в задачах на экстремум. Матем. сб., **78** (**120**), № 1, 65 (1969).
5. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, М., 1962.
6. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., 1966.

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
26/X 1971

*E. RAIK*

### TÕENÄOSUS- JA KVANTIILFUNKTSIONAALIGA STOHHASTILISE PROGRAMMEERIMISE ÜLESANNETEST

Esitatakse tõenäosus- ja kvantiilfunktsionaali pidevuse ja poolpidevuse piisavad tingimused ruumides $R^m$, $C$ ja $L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ ning käsitletakse probleeme, mis tulenevad stohhastilise programmeerimise ülesannetest, kus lahendit otsitakse juhuslike parameetrite funktsioonina.

*E. RAIK*

### ON THE STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEM WITH THE PROBABILITY AND QUANTILE FUNCTIONALS

The sufficient conditions of continuity and semi-continuity of probability and quantile functionals in the spaces $R^m$, $C$ and $L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ are given. The stochastic programming problems with the solutions depending on random parameters are discussed.