EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972. № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.2.01

УДК 519.48

*Ю. ХЕННО*

# ПЛОТНО ВЛОЖЕННЫЕ ПРАВЫЕ ИДЕАЛЫ СИСТЕМ МЕНГЕРА

Ниже доказывается теорема, которая является в классе систем Менгера аналогом теоремы Шеврина [1], а именно: *система Менгера с равнодействующими справа элементами не может быть плотно вложенным правым идеалом никакой системы Менгера в никаком классе* $\mathfrak{M}(H)$ *систем.* Отсюда следует, что полугруппа с равнодействующими справа элементами не может быть плотно вложенным правым идеалом никакой полугруппы.

Пусть $I$ — непустое подмножество множества всех натуральных чисел. Совокупность $A = \{A_n, n \in I\}$ непересекающихся множеств $A_n$ называется системой Менгера (см. [2]), если при любых $n, m \in I$ всяким $a_1, \ldots, a_m \in A_n$, $b \in A_m$ сопоставлен элемент $a_1 \ldots a_m b \in A_n$ (который будем называть произведением элементов $a_1, \ldots, a_m, b$), причем выполняется тождество

$$x_1 \ldots x_m(y_1 \ldots y_e z) = (x_1 \ldots x_m y_1) \ldots (x_1 \ldots x_m y_e) z \tag{1}$$

для любых $x_1, \ldots, x_m \in A_n$, $y_1, \ldots, y_e \in A_m$, $z \in A_e$, $n, m, l \in I$.

Система Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ называется подсистемой системы $B = \{B_m, m \in J\}$, если $I \subseteq J$, $A_n \subseteq B_n$ при всех $n \in I$ и из $a_1, \ldots, a_m \in A_n$, $b \in A_m$, $n, m \in I$ следует $a_1 \ldots a_m b \in A_n$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(H)$ класс всех систем Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$, у которых $I \subseteq H$.

Подсистема $A = \{A_n, n \in I\}$ системы Менгера $B = \{B_m, m \in J\}$ называется п р а в ы м  и д е а л о м системы $B$, если из $a_1, \ldots, a_m \in A_n$, $n \in I$, $b \in B_m$, $m \in J$ следует $a_1 \ldots a_m b \in A_n$, и л е в ы м  и д е а л о м, если из $x_1, \ldots, x_m \in B_n$, $n \in J$, $a \in A_m$, $m \in I$ следует $x_1 \ldots x_m a \in A_n$ (ясно, что тогда $I = J$) и, наконец, подсистема $A$ называется д в у с т о р о н н и м  и д е а л о м, если она является и правым, и левым идеалом системы $B$.

Гомоморфизмы и конгруэнции систем Менгера определяются, как в [2].

Если $\varrho$ — некоторое свойство, которым обладает подмножество $A$ системы Менгера $B$, то $A$ называется $\varrho$-подмножеством системы $B$. $\varrho$-Подмножество $A = \{A_n, n \in I\}$ системы Менгера $B = \{B_m, m \in J\}$ называется $\varrho$-п л о т н о  в л о ж е н н ы м в классе $\mathfrak{M}(H)$ $(I \subseteq J \subseteq H)$, если выполняются следующие условия:

1° всякая ненулевая конгруэнция системы $B$ индуцирует ненулевую конгруэнцию на множестве $A$;

2° если $C$ — произвольная система Менгера из класса $\mathfrak{M}(H)$, которая содержит $B$ в качестве собственной подсистемы так, что $A$ является $\varrho$-подмножеством системы $C$, то существует ненулевая конгруэнция системы $C$, которая на $A$ (а в силу 1° также на $B$) индуцирует нулевую конгруэнцию.

Нас будут интересовать свойства: быть подсистемой, быть правым (двусторонним) идеалом. Соответственно будем говорить о плотно вложенных подсистемах, о плотно вложенных правых (двусторонних) идеалах.

Элементы $e_1^n, \ldots, e_n^n \in A_n$ системы Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ называются единицами, если $e_1^n \ldots e_n^n y = y$, $x_1 \ldots x_n e_i^n = x_i$ при любых $y \in A_n$, $x_1, \ldots, x_n \in A_m$, $m \in I$, $i = 1, \ldots, n$. Система $A = \{A_n, n \in I\}$ называется системой с единицами, если $e_1^n, \ldots, e_n^n \in A_n$ для любого $n \in I$.

Пусть $M$ — множество. Обозначим через $\varphi_n(M)$ совокупность всех $n$-местных функций на множестве $M$ и сопоставим всяким $a_1, \ldots, a_m \in \varphi_n(M)$, $b \in \varphi_m(M)$ функцию $a_1 \ldots a_m b \in \varphi_n(M)$, определенную формулой $\bar{\alpha}(a_1 \ldots a_m b) = (\bar{\alpha} a_1) \ldots (\bar{\alpha} a_m) b$, где через $\bar{\alpha} a$ обозначен результат применения $a \in \varphi_n(M)$ к $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M^n$.

Известно [2], что при таком определении совокупность $\varphi_I(M) = \{\varphi_n(M), n \in I\}$ образует систему Менгера, которая называется симметрической. Функции $e_1^n, \ldots, e_n^n$, определенные формулой $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) e_i^n = \alpha_i$, являются единицами системы $\varphi_I(M)$.

Теорема 1. *Всякую систему Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ можно при любом $J \supseteq I$ вложить в такую систему $B = \{B_m, m \in J\}$ с единицами, что все правые идеалы системы $A$ являются правыми идеалами системы $B$.*

Доказательство. Известно [2], что всякую систему Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ можно вложить в симметрическую систему $\varphi_I(M)$ функций на некотором множестве $M$, но так как $\varphi_I(M) \subseteq \varphi_J(M)$ при любом $J \supseteq I$, то $A$ можно вложить в систему с единицами $\varphi_J(M)$.

Образуем в системе $\varphi_J(M)$ подмножества $B^k = \{B_n^k, n \in J\}$, $k = 1, 2, \ldots$, следующим индуктивным образом:

1) $B_n^1 = A_n \cup \{e_1^n \ldots, e_n^n\}$ при всех $n \in J$. (2)

Пусть подмножества $B^1, \ldots, B^{k-1}$ уже определены.

2) $B_n^k = \{x_1 \ldots x_e y;\ x_1 \in B_n^{k_1}, \ldots, x_e \in B_n^{k_e};\ y \in B_e^{k_{e+1}};\ k_1, \ldots, k_{e+1} < k;\ \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant e+1} k_i = k-1\}$, $n \in I$. (3)

Обозначим

$$B_n = \bigcup_k B_n^k. \tag{4}$$

Ввиду (3) совокупность $B = \{B_n, n \in J\}$ является подсистемой системы $\varphi_J(M)$, которая вследствие (2) является системой с единицами и содержит систему $A$. Пусть $C = \{C_n, n \in I_1\}$ $(I_1 \subseteq I)$ — правый идеал системы $A$. Покажем, что при всяких $c_1, \ldots, c_m \in C_n$, $n \in I_1$, $b \in B_m$, $m \in J$ имеем $c_1 \ldots c_m b \in C_n$, т. е. $C$ является правым идеалом в $B$.

Из (4) следует, что существует минимальное число $k$ такое, что $b \in B_m^k$. Докажем утверждение индукцией по $k$.

Если $k = 1$, то при $b \in A_m$ утверждение следует из того, что $C$ — правый идеал системы $A$, а при $b = e_i^m$ из того, что имеем $c_1 \ldots c_m b = c_1 \ldots c_m e_i^m = c_i \in C_n$.

Пусть при $k > 1$ утверждение уже доказано для всех $k' < k$. Согласно (3) существуют $x_1 \in B_m^{k_1}, \ldots, x_e \in B_m^{k_e}$, $y \in B_e^{k_{e+1}}$, $k_1, \ldots, k_{e+1} < k$ такие, что $b = x_1 \ldots x_e y$. По предположению индукции $c'_i = c_1 \ldots c_m x_i \in C_n$, $i = 1, \ldots, l$, $c'_1 \ldots c'_e y \in C_n$, следовательно, $c_1 \ldots$

$\ldots c_m b = c_1 \ldots c_m(x_1 \ldots x_e y) = (c_1 \ldots c_m x_1) \ldots (c_1 \ldots c_m x_e y) =$
$= c'_1 \ldots c'_e y \in C_n$. Теорема доказана.

Будем говорить, что конгруэнция $\varrho$ системы Менгера $B = \{B_n, n \in I\}$ разделяет элементы множества $A = \{A_n, n \in I\}$ $(A_n \subseteq B_n)$, если для всяких $a_1, a_2 \in A_n$, $n \in I$ из $a_1 \varrho a_2$ следует $a_1 = a_2$.

Лемма 1. *Для всякого подмножества A системы Менгера B существует максимальная конгруэнция системы B, разделяющая элементы A.*

Доказательство. Утверждение доказывается так же, как и в случае обычных универсальных алгебр (см., напр., [3]). Рассмотрим совокупность $K$ всех разделяющих элементы $A$ конгруэнций системы $B$. $K$ не пусто, так как содержит нулевую конгруэнцию, и при помощи леммы Цорна можно убедиться, что в $K$ существует максимальный элемент. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если система Менгера $B = \{B_m, m \in J\}$ содержит плотно вложенный в классе $\mathfrak{M}(H)$ правый идеал $A = \{A_n, n \in I\}$ $(I \subseteq J \subseteq H)$, то B является системой с единицами.*

Доказательство. Предположим, что система $A = \{A_n, n \in I\}$ является плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(H)$ правым идеалом системы $B = \{B_m, m \in J\}$ и $B$ не имеет полного набора единиц. Покажем, что тогда существует система Менгера $C = \{C_m, m \in J\}$, которая содержит $B$ как собственную подсистему так, что $A$ является правым идеалом в $C$ и всякая ненулевая конгруэнция системы $C$ индуцирует ненулевую конгруэнцию системы $B$. Получим противоречие с условием 2° определения плотного вложения, которое и докажет теорему.

По теореме 1 систему $B$ можно вложить в такую систему с единицами $D = \{D_m, m \in J\}$, что $A$ будет правым идеалом системы $D$. Пусть $\varrho$ — максимальная разделяющая элементы $B$ конгруэнция системы $D$, $C = D/\varrho$. Так как $\varrho$ не склеивает никаких элементов из $B$, то $B$ можно вложить в $C$ и $C$ как эпиморфный образ системы с единицами тоже является системой с единицами. Следовательно, $B$ как система без единиц является собственной подсистемой системы $C$ и из определения $\varrho$ ясно, что всякая ненулевая конгруэнция системы $C$ индуцирует ненулевую конгруэнцию и на $B$. Теорема доказана.

Элементы $c_1, c_2 \in A_m$, $m \in I$ системы Менгера $A = \{A_n, n \in I\}$ называются равнодействующими справа, если при любых $a_1, \ldots, a_m \in A_n$, $n \in I$ имеем $a_1 \ldots a_m c_1 = a_1 \ldots a_m c_2$.

Теорема 3. *Система Менгера с равнодействующими справа элементами не может быть плотно вложенным правым идеалом никакой системы Менгера в никаком классе $\mathfrak{M}(H)$ систем.*

Доказательство. Предположим, что система Менгера $A =$ $= \{A_n, n \in I\}$ с равнодействующими справа элементами $c_1, c_2 \in A_k$, $k \in I$ $(c_1 \neq c_2)$ является плотно вложенным в классе $\mathfrak{M}(H)$ правым идеалом системы $B = \{B_m, m \in J\}$ $(I \subseteq J \subseteq H)$. Покажем, что тогда существует система $C = \{C_m, m \in J\}$, которая содержит $B$ как собственную подсистему так, что $A$ является в $C$ правым идеалом и всякая ненулевая конгруэнция системы $C$ индуцирует на $B$ ненулевую конгруэнцию. Получим противоречие с условием 2°, которое и докажет теорему.

Займемся теперь построением системы $C$ при помощи ряда лемм и определений. Заметим, что по теореме 2 система $B$ имеет при всяком $m \in J$ единицы $e^m_1, \ldots, e^m_m \in B_m$.

Будем говорить, что элементы $x_1, \ldots, x_k \in B_n$, $n \in J$ имеют специальный общий делитель (с. о. д.), если существуют $b_1, \ldots, b_m \in B_n$, $a_1, \ldots, a_k \in A_m$, $m \in I$ такие, что $x_1 = b_1 \ldots b_m a_1$, $\ldots$, $x_k = b_1 \ldots b_m a_k$.

Лемма 2. 1) *Произвольные* $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, $n \in I$ *имеют с. о. д.;* 2) *элементы* $e_1^k, \ldots, e_k^k \in B_k$ *не имеют с. о. д.;* 3) *если* $x_1, \ldots, x_k \in B_n$, $n \in I$ *имеют с. о. д., то при всяких* $y_1, \ldots, y_n \in B_e$, $l \in J$ *элементы* $y_1 \ldots y_n x_1, \ldots, y_1 \ldots y_n x_k \in B_e$ *тоже имеют с. о. д.;* 4) *если* $x_1, \ldots, x_k \in B_n$, $n \in I$ *имеют с. о. д., то* $x_1 \ldots x_k c_1 = x_1 \ldots x_k c_2$.

Доказательство. 1. Утверждение следует из равенства $e_1^n \ldots e_n^n a_1 = a_1, \ldots, e_1^n \ldots e_n^n a_n = a_n$. 2. Если предположить, что существуют $b_1, \ldots, b_m \in B_k$, $a_1, \ldots, a_k \in A_m$, $m \in I$ такие, что $e_1^k = b_1 \ldots b_m a_1, \ldots, e_k^k = b_1 \ldots b_m a_k$, то $c_1 = e_1^k \ldots e_k^k c_1 = (b_1 \ldots b_m a_1) \ldots (b_1 \ldots b_m a_k) c_1 = b_1 \ldots b_m (a_1 \ldots a_k c_1) = b_1 \ldots b_m (a_1 \ldots a_k c_2) = (b_1 \ldots b_m a_1) \ldots (b_1 \ldots b_m a_k) c_2 = e_1^k \ldots e_1^k c_2 = c_2$. 3. Если $x_i = b_1 \ldots b_m a_i$, то $y_1 \ldots y_n x_i = y_1 \ldots y_n (b_1 \ldots b_m a_i) = (y_1 \ldots y_n b_1) \ldots (y_1 \ldots y_n b_m) a_i$, $i = 1, \ldots, k$. 4. Если $x_i = b_1 \ldots b_m a_i$, $i = 1, \ldots, k$, то $x_1 \ldots x_k c_1 = (b_1 \ldots b_m a_1) \ldots (b_1 \ldots b_m a_k) c_1 = b_1 \ldots b_m (a_1 \ldots a_k c_1) = b_1 \ldots b_m (a_1 \ldots a_k c_2) = (b_1 \ldots b_m a_1) \ldots (b_1 \ldots b_m a_k) c_2 = x_1 \ldots x_k c_2$. Лемма доказана.

Обозначим

$$e_i^k = \overset{0}{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \ldots, k; \qquad c_j = \overset{0}{c}_j, \quad j = 1, 2,$$

и пусть $\overset{\eta}{\varepsilon}_1, \ldots, \overset{\eta}{\varepsilon}_k$, $\eta = 1, 2$, $\overset{1}{c}_1, \overset{1}{c}_2$ — символы, не принадлежашие системе $B$. Определим индуктивно множества $W_n$, $n \in J$, слов $w$ над множеством

$$X = \bigcup_{n \in J} B_n \cup \{\overset{1}{\varepsilon}_1, \ldots, \overset{1}{\varepsilon}_k, \overset{2}{\varepsilon}_1, \ldots, \overset{2}{\varepsilon}_k, \overset{1}{c}_1, \overset{1}{c}_2\} \tag{5}$$

и веса $h(w)$ этих слов.

Определение I.

I.1. Положим $B_n \subseteq W_n$ при всяком $n \in J$, положим также $\overset{1}{\varepsilon}_1, \ldots, \overset{1}{\varepsilon}_k, \overset{2}{\varepsilon}_1, \ldots, \overset{2}{\varepsilon}_k, \overset{1}{c}_1, \overset{1}{c}_2 \in W_k$ и $h(b) = h(\overset{1}{\varepsilon}_i) = h(\overset{2}{\varepsilon}_i) = h(\overset{1}{c}_j) = 1$ при всяком $b \in B$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1,2$.

Этим все слова весом 1 определены.

I.2. Если $w_1, \ldots, w_m \in W_n$, $v \in W_m$, $n, m \in J$ и $h(w_1) = \ldots = h(w_m) = h(v) = 1$, то выражение $w_1 \ldots w_m v$ есть слово весом 2 из $W_n$, за исключением следующих случаев:

I.2.1. $w_1, \ldots, w_m \in B_n$, $v \in B_m$; (6)

I.2.2. $m = k$, $w_1, \ldots, w_k \in B_n$, $v = \overset{1}{c}_j$, $j \in \{1, 2\}$; (7)

I.2.3. $m = k$, $w_1, \ldots, w_k \in B_n$ и $w_1, \ldots, w_k$ имеют с. о. д.; (8)

I.2.4. $m = n = k$, $w_1 = \overset{\eta_1}{\varepsilon}_1, \ldots, w_k = \overset{\eta_k}{\varepsilon}_k$, $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \{0, 1, 2\}$. (9)

Этим все слова весами 1 и 2 определены. Пусть $h > 2$ и все слова весом меньше $h$ из всех множеств $W_n$, $n \in I$, уже определены.

I.3. Если $w_1, \ldots, w_m \in W_n$, $v \in W_m$, $n, m \in J$ и $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} h(w_i) = h - 1$, $h(v) = 1$, то выражение $w_1 \ldots w_m v$ есть слово весом $h$ из $W_n$, за исключением следующих случаев:

I.3.1. Слова $w_i$, $i = 1, \ldots, m$, имеют вид

$$w_i = w'_1 \ldots w'_e b_i, \tag{10}$$

где $w_1', \ldots, w_e' \in W_n$, $b_i \in B_e$, $l \in J$ и выражение $b_1 \ldots b_m v$ не является согласно I.2.1—I.2.3 словом.

I.3.2. $m = n = k$ и слова $w_i$, $i = 1, \ldots, k$, имеют вид

$$w_i = w'_1 \ldots w'_k \varepsilon_i^{\eta_i}, \tag{11}$$

где $w'_1, \ldots, w'_k \in W_k$, $\eta_1, \ldots, \eta_k \in \{0, 1, 2\}$.

I.3.3. $m = n = k$, среди слов $w_i$, $i = 1, \ldots, k$, некоторые имеют вид (11), а для остальных

$$w_i = w'_i \tag{12}$$

и

$$w'_i \in B_k, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{13}$$

или

$$w'_i = w''_1 \ldots w''_e b_i, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{14}$$

где $w''_1, \ldots, w''_e \in W_k$, $b_1, \ldots, b_k \in B_e$, $b \in J$.

Слова $w_1, w_2 \in W_n$ считаем равными ($w_1 = w_2$) только при $h(w_1) = h(w_2)$ согласно следующему индуктивному определению.

Определение II.

II.1. Если $h(w_1) = h(w_2) = 1$, то $w_1 = w_2$ тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих условий:

II.1.1. $w_1, w_2 \in B_n$, $n \in J$ и $w_1, w_2$ равны в системе $B$;

II.1.2. $w_1 = \varepsilon_i^{\eta_1}$, $w_2 = \varepsilon_j^{\eta_2}$ и $\eta_1 = \eta_2$, $i = j$;

II.1.3. $w_1 = \overset{1}{c}_i$, $w_2 = \overset{1}{c}_j$ и $i = j$.

Пусть натуральное число $h > 1$ и равенство уже определено для всех слов весом меньше $h$.

II.2. Если $h(w_1) = h(w_2) = h$, то $w_1 = w_2$ тогда и только тогда, когда $w_1, w_2$ имеют вид $w_1 = v_{11} \ldots v_{1m} u_1$, $w_2 = v_{21} \ldots v_{2m} u_2$ и $v_{1i} = v_{2i}$, $i = 1, \ldots, m$, $u_1 = u_2$.

Определим для всяких слов $w_1, \ldots, w_m \in W_n$, $v \in W_m$, $n, m \in J$, индукцией их произведение $w_1 \ldots w_m v \in W_n$.

Определение III.

III.1. Если выражение $w_1 \ldots w_m v$ — слово, то произведение равно этому слову. Если это выражение не является словом, то применим индукцию по $h(v) = h$.

Пусть $h = 1$. Применим вспомогательную индукцию по $g = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} h(w_i)$. Пусть $g = 1$.

III.2.1. В случае (6) произведение определяется так же, как и в системе $B$.

III.2.2. В случае (7) положим $w_1 \ldots w_k \overset{1}{c}_j = w_1 \ldots w_k \overset{0}{c}_j$, где последнее произведение ввиду $\overset{0}{c}_j \in B_k$ уже определено при помощи III.2.1.

III.2.3. В случае (8) положим при $v = \varepsilon_i^{\eta}$, что $w_1 \ldots w_k \varepsilon_i^{\eta} = w_i$. При $v \in B_k$, $v = \overset{1}{c}_j$ произведение уже определено при помощи III.2.1 и III.2.2.

III.2.4. В случае (9) положим ☆ при всяких $b \in B_k$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_k \in \{0, 1, 2\}$, $\xi \in \{0, 1\}$

---

☆ Заметим, что по п. 2 леммы 2 определения III.2.3 и III.2.4 не пересекаются. Кроме того, легко проверить, что при $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$, т. е. при $\varepsilon_1^{\eta_1}, \ldots, \varepsilon_k^{k} \in B_k$, определение III.2.4 не противоречит III.2.1, III.2.2, а формула (17) при $\xi = 0$, т. е. $\overset{\xi}{c}_j \in B_k$, не противоречит (15) и формула (16) при $\eta = 0$, т. е. $\varepsilon_i^{\eta} \in B_k$, также не противоречит (15).

$$\varepsilon_1^{\eta_1} \dots \varepsilon_k^{\eta_k} b = b, \tag{15}$$

$$\varepsilon_1^{\eta_1} \dots \varepsilon_k^{\eta_k} \varepsilon_i^{\eta} = \varepsilon_i^{\eta}, \tag{16}$$

$$\varepsilon_1^{\eta_1} \dots \varepsilon_k^{\eta_k} c_j^{\xi} = c^0_{(\bar{\eta}\xi)*j}, \tag{17}$$

где $\bar{\eta} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \eta_i$ и $*$ обозначает следующую бинарную операцию на множестве $\{0, 1, 2\}$:

$$\eta * \eta' = \begin{cases} \eta, & \text{если} \quad \eta \neq 0, \\ \eta', & \text{если} \quad \eta = 0. \end{cases}$$

Этим произведение в случае $g = 1$ определено. Пусть $g_0 > 1$, $g = g_0$ и произведение уже определено во всех случаях, когда $g < g_0$.

III.3.1. В случае (10) положим $w_1 \dots w_m v = w'_1 \dots w_e'(b_1 \dots b_m v)$. Согласно III.2.1—III.2.3 произведение $v' = b_1 \dots b_m v$ уже определено и является словом весом 1, следовательно, ввиду $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant e} h(w'_j) < g_0$ произведение $w_1' \dots w_e' v'$ по предположению вспомогательной индукции тоже определено.

III.3.2. В случае (11) положим

$$w_1 \dots w_k v = w'_1 \dots w'_k (\varepsilon_1^{\eta_1} \dots \varepsilon_k^{\eta_k} v). \tag{18}$$

Согласно III.2.4. произведение $\varepsilon_1^{\eta_1} \dots \varepsilon_k^{\eta_k} v = v'$ уже определено и является словом весом 1, следовательно, ввиду $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} h(w'_j) < g_0$ произведение $w_1' \dots w_k' v'$ по предположению вспомогательной индукции определено.

III.3.3. Если выражение $w_1 \dots w_m v$ не является словом согласно I.3.3, то обозначим $\eta_i = 0$ для всех индексов $i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, при которых слово $w_i$ не выражается формулой (11), и определим произведение формулой (18).

Этим произведение определено во всех случаях, когда $h(v) = 1$. Пусть $h_0 > 1$, $h(v) = h$ и произведение уже определено во всех случаях, когда вес последнего сомножителя меньше $h$.

III.4. Если $v = v_1 \dots v_e u$, то положим

$$w_1 \dots w_m v = (w_1 \dots w_m v_1) \dots (w_1 \dots w_m v_e) u. \tag{19}$$

Ввиду $h(v_i) < h_0$, $i = 1, \dots, l$, $h(u) < h_0$ последнее произведение по предположению индукции уже определено.

Относительно приведенных определений можно заметить следующее.

Замечание 1°. Если выражение $w_1 \dots w_m b$, $b \in B_m$, — слово, то для всякого $v \in W_m$, $h(v) = 1$, выражение $w_1 \dots w_m v$ — тоже слово.

Замечание 2°. Пусть выражение $w'_1 \dots w'_k \varepsilon_j^{\eta}$ — слово. Если выражение $w_i = w'_1 \dots w'_k \varepsilon_i^{\eta_i}$ словом не является (что может случиться только вследствие I.2.1 или I.3.1 при $\varepsilon_j^{\eta} \notin B_k$, $\varepsilon_i^{\eta_i} \in B_k$), то $\eta > 0$, $\eta_i = 0$ и выполняется (13) или (14) и по III.3.1, III.2.1 выполняется (12).

Замечание 3°. Если выражение $w_1 \dots w_k v$ не является словом из-за I.3.3, то все слова $w_i$, $i = 1, \dots, k$, можно представить как произведения вида (11). Действительно, ввиду (13), (14) имеем по III.2.1, III.3.1, что $w'_1 \dots w'_k \varepsilon_i^{0} = w'_i$, и, учитывая (12), имеем $w_i = w'_1 \dots w'_k \varepsilon_i^{\eta_i}$, где $\eta_i = 0$, если слово $w_i$ не имеет вида (11). Учитывая это и сравнивая определения I.3.1—I.3.3, получим, что если выражение $w_1 \dots w_m v$, $m \in J$, не является по этим определениям словом, то выполняется

I.3′. Слова $w_i$, $i = 1, \dots, m$, можно представить как произведения вида

$$w_i = w'_1 \dots w'_t v_i, \tag{20}$$

где

$$\max h(w'_i) < \max h(w_i), \tag{21}$$

$$h(v_i) = 1, \tag{22}$$

и выражение $v_1 \dots v_m v$ не является согласно I.2.1—I.2.4 словом. Из III.2.1—III.2.4 ясно, что последнее условие эквивалентно условию

$$h(v_1 \dots v_m v) = 1. \tag{23}$$

Согласно III.3.1—III.3.3 произведение $w_1 \dots w_m v$ в этом случае определяется формулой

$$w_1 \dots w_m v = w'_1 \dots w'_t (v_1 \dots v_m v). \tag{24}$$

При помощи определений I и III легко проверить, что верно и обратное утверждение: если $h(v) = 1$, слова $w_i$ имеют вид (20) и выполняется (23), то выражение $w_1 \dots w_m v$ не является вследствие I.3.1—I.3.3 словом и из сказанного выше следует (24).

Лемма 3. *Для всяких* $x_1, \dots, x_m \in W_n$, $y_1, \dots, y_e \in W_m$, $z \in W_e$, $n, m, l \in J$ *выполняется* (1), *т. е. совокупность* $W = \{W_n, n \in I\}$ — *система Менгера.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $h = h(z)$. Пусть $h(z) = 1$.

Если выражение $y_1 \dots y_e z$ — слово, то (1) следует из (19) при $x_i = w_i$, $y_i = v_i$, $z = u$. Предположим, что выражение $y_1 \dots y_e z$ не является словом и применим вспомогательную индукцию по $g = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant e} h(y_i)$. Пусть $g = 1$. Из определения III ясно, что тогда

$$h(y_1 \dots y_e z) = 1. \tag{25}$$

1. Случай, когда

$$y_1, \dots, y_e \in B_m, \tag{26}$$

$$z \in B_e \quad \text{или} \quad l = k, \quad z = c_j^1. \tag{27}$$

Из III.2.1, III.2.2 следует, что тогда

$$y_1 \dots y_e z \in B_m. \tag{28}$$

Если выражение $x_1 \dots x_m y_1$ — слово, то по замечанию 1° выражения $x_1 \dots x_m y_i$ $(i = 2, \dots, l)$ — тоже слова и (1) следует из III.3.1.

Предположим, что выражение $x_1 \dots x_m y_1$ не является словом и применим вспомогательную индукцию по $f = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} h(x_i)$. Пусть $f = 1$.

1.1. Если

$$x_1, \dots, x_m \in B_n, \tag{29}$$

то (1) следует из определений III.2.1, III.2.2 и из факта, что в системе Менгера $B$ тождество (1) выполняется.

1.2. Если

$$n = m = k, \quad x_i = \varepsilon_i^{\eta_i}, \tag{30}$$

то ввиду (26), (28) имеем по (15)

$$x_1 \dots x_k y_i = y_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{31}$$

$$x_1 \dots x_k (y_1 \dots y_e z) = y_1 \dots y_e z. \tag{32}$$

Из (31) и (32) следует (1).

Этим утверждение леммы при $f = 1$ доказано. Пусть натуральное число $f_0 > 1$, $f = f_0$ и утверждение уже доказано при $f < f_0$.

1.3. Если выражение $x_1 \dots x_m y_1$ не является словом вследствие определений I.3.1—I.3.3, то ввиду замечания 3° обозначим $x_i = w_i$, где слова $w_i$ имеют вид (20). Тогда из (24) следует при $v = y_i$, что

$$x_1 \dots x_m y_i = w'_1 \dots w'_t (v_1 \dots v_m y_i), \quad i = 1, \dots, l, \tag{33}$$

и согласно (23)

$$h(v_1 \dots v_m y_i) = 1. \tag{34}$$

Ввиду (26), (28) и замечания 1° выражение $v_1 \dots v_m (y_1 \dots y_e z)$ тоже не является словом, и из (24) при $v = y_1 \dots y_e z$ следует

$$x_1 \dots x_m (y_1 \dots y_e z) = w'_1 \dots w'_t (v_1 \dots v_m (y_1 \dots y_e z)). \tag{35}$$

Учитывая (21), (22) и (26), имеем по предположению индукции

$$(w'_1 \dots w'_t (v_1 \dots v_m y_1)) \dots (w'_1 \dots w'_t (v_1 \dots v_m y_e)) z =$$
$$= w'_1 \dots w'_t ((v_1 \dots v_m y_1) \dots (v_1 \dots v_m y_e) z), \tag{36}$$
$$(v_1 \dots v_m y_1) \dots (v_1 \dots v_m y_e) z = v_1 \dots v_m (y_1 \dots y_e z). \tag{37}$$

Из (33), (35)—(37) следует (1).

2. Случай, когда

$$l = k, \quad y_1, \dots, y_k \in B_m \quad \text{и} \quad y_1, \dots, y_k \quad \text{имеют с.о.д.} \tag{38}$$

Заметим, что кроме (26), в этом случае по III.2.3 выполняется и (28). Если выражение $x_1 \dots x_m y_1$ — слово, то доказательство совпадает с таковым в случае 1. Предположим, что выражение $x_1 \dots x_m y_1$ не является словом и применим вспомогательную индукцию по $f = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} h(x_i)$.

Пусть $f = 1$. Ввиду (26) надо рассмотреть следующие случаи.

2.1. Если

$$m = k, \; x_1, \dots, x_k \in B_n \text{ и } x_1, \dots, x_k \text{ имеют с.о.д.}, \tag{39}$$

то предположим $z = \varepsilon_t^{\eta}$, $\eta > 0$, так как ввиду того, что выполняются (26), (29), случаи $z \in B_k$, $z = c_j^1$ уже рассмотрены в 1.1.

По III.2.3 ввиду (38) имеем

$$y_1 \dots y_k z = y_t, \tag{40}$$

и так как по п. 3 леммы 2 из (38) следует, что слова $x_1 \dots x_m y_i$, $i = 1, \dots, k$, тоже имеют с.о.д., то по III.2.3

$$(x_1 \dots x_m y_1) \dots (x_1 \dots x_m y_k) z = x_1 \dots x_m y_t. \tag{41}$$

Из (40) и (41) следует (1).

Если имеет место (30), то доказательство совпадает с таковым в случае 1.2.

Этим утверждение леммы в случае 2 при $f = 1$ доказано, а дальнейшее доказательство совпадает в таковым в случае 1.

3. Случай, когда

$$m = l = k, \quad y_i = \varepsilon_i^{\eta_i}, \quad i = 1, \dots, k. \tag{42}$$

Если все выражения $w_i = x_1 \dots x_k y_i (i = 1, \dots, k)$ — слова, то они имеют вид (11), где $w_i' = x_i$, и из III.3.2 следует (1). Более того, если хоть одно из выражений $w_i$ — слово, то согласно замечанию 2° выполняются (12)—(14) и из III.3.3 следует (1). Поэтому предположим, что ни одно из выражений $w_i$ не является словом и применим вспомогательную индукцию по $f = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h(x_i)$. Пусть $f = 1$.

3.1. Если выполняются (26) и (29), т. е. $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$, то при $z \in B_k$ или $z = c_j^1$ этот случай уже рассмотрен в 1.1, а при $z = \varepsilon_i^\eta$ имеем согласно III.2.4

$$y_1 \ldots y_k z = z \tag{43}$$

и согласно III.2.1

$$x_1 \ldots x_k y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{44}$$

Из (43) и (44) следует (1).

3.2. Если имеет место (39), то по III.2.3 получим (44).

Если $z \in B_k$ или $z = \varepsilon_j^\eta$, то по III.2.4 получим (43), а из (43), (44) следует (1). Если $z = c_j^1$, то согласно III.2.4 имеем

$$y_1 \ldots y_k z = \varepsilon_1^{\eta_1} \ldots \varepsilon_k^{\eta_k} \overset{1}{c_j} = \overset{0}{c}_{j_1}, \tag{45}$$

где $j_1 = (\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \eta_i) * j$.

Ввиду (39) имеем согласно п. 4 леммы 2, что

$$x_1 \ldots x_k \overset{0}{c}_{j_1} = x_1 \ldots x_k \overset{0}{c}_j, \tag{46}$$

а по III.2.3

$$x_1 \ldots x_k \overset{0}{c}_j = x_1 \ldots x_k \overset{1}{c}_j = x_1 \ldots x_k z. \tag{47}$$

Из (44)—(47) следует (1).

Этим утверждение леммы в случае 3 при $f = 1$ доказано. Пусть натуральное число $f_0 > 1$, $f = f_0$ и утверждение уже доказано при $f < f_0$.

3.3. Если выражения $x_1 \ldots x_k y_i$, $i = 1, \ldots, k$, не являются словами вследствие I.3.1—I.3.3, то обозначим $x_i = w_i$, где слова $w_i$ имеют вид (20) и так же, как в 1.3, получим (33), (34).

Если выражение $v_1 \ldots v_k (y_1 \ldots y_k z)$ не является словом, то так же, как в 1.3, получим (1). Поэтому предположим, что выражение $v_1 \ldots v_k (y_1 \ldots y_k z)$ — слово.

Если $z \in B_k$ или $z = c_j'$, то по III.2.4 имеет место (28), но тогда выражение $v_1 \ldots v_k (y_1 \ldots y_k z)$ не является словом, ибо в противном случае выражения $v_1 \ldots v_k y_i$ являлись бы ввиду (28) согласно замечанию 1° тоже словами, но это противоречит (34). Поэтому надо рассматривать лишь случай $z = \varepsilon_j^\eta$. По (16) получим (43). Согласно замечанию 2° выражение $v_1 \ldots v_k (y_1 \ldots y_k z) = v_1 \ldots v_k z = v_1 \ldots v_k \varepsilon_j^\eta$ является словом, а выражения $v_1 \ldots v_k y_i = v_1 \ldots v_k \varepsilon_i^{\eta_i}$ не являются словами только при $\eta > 0$, $\eta_1 = \ldots = \eta_k = 0$, $v_1, \ldots, v_k \in B_t$, но тогда по III.2.1

$$v_1 \ldots v_k y_i = v_i, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{48}$$

Из (33), (43) и (48) следует (1).

Этим утверждение при $g = 1$ доказано. Пусть натуральное число $g_0 > 1$, $g = g_0$ и утверждение уже доказано при $g < g_0$.

4. Случай, когда выражение $y_1 \ldots y_e z$ не является словом вследствие I.3.1—I.3.3. Тогда $y_i = w_i$, где $w_i$ имеют вид (20), и согласно (23)

$$h(v_1 \ldots v_e z) = 1, \tag{49}$$

а из (24) следует, что

$$y_1\dots y_e z = w'_1\dots w'_t(v_1\dots v_e z). \quad (50)$$

Вследствие (21), (49) по предположению индукции имеем

$$x_1\dots x_m(w'_1\dots w'_t(v_1\dots v_e z)) = \\ =(x_1\dots x_m w'_1)\dots(x_1\dots x_m w'_t)(v_1\dots v_e z). \quad (51)$$

Вследствие (22) по предположению индукции имеем

$$(x_1\dots x_m w'_1)\dots(x_1\dots x_m w'_t)(v_1\dots v_e z) = \\ =((x_1\dots x_m w'_1)\dots(x_1\dots x_m w'_t)v_1)\dots((x_1\dots x_m w'_1)\dots(x_1\dots x_m w'_t)v_e)z. \quad (52)$$

Вследствие (21), (22) по предположению индукции имеем

$$(x_1\dots x_m w'_1)\dots(x_1\dots x_m w'_t)v_i = x_1\dots x_m(w'_1\dots w'_t v_i) = x_1\dots x_m y_i. \quad (53)$$

Из (50)—(53) следует (1).

Этим утверждение при $h=1$ доказано. Пусть натуральное число $h_0>1$, $h=h_0$ и утверждение уже доказано при $h<h_0$. Если слово $z$ имеет вид $z=w_1\dots w_t v$, то ввиду $\max h(w_i)<h_0$, $h(v)=1<h_0$ по предположению индукции имеем

$$x_1\dots x_m(y_1\dots y_e z) = x_1\dots x_m(y_1\dots y_e(w_1\dots w_t v)) = \\ = x_1\dots x_m((y_1\dots y_e w_1)\dots(y_1\dots y_e w_t)v) = \\ =(x_1\dots x_m(y_1\dots y_e w_1))\dots(x_1\dots x_m(y_1\dots y_e w_t))v = \\ =((x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_e)w_1)\dots((x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_e)w_t)v = \\ =(x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_e)(w_1\dots w_t v) = \\ =(x_1\dots x_m y_1)\dots(x_1\dots x_m y_e)z.$$

Лемма доказана.

Из I.2.1, III.2.1 следует, что $A$ и $B$ являются подсистемами системы $W$.

Лемма 4. *Система Менгера $A=\{A_n,\ n\in I\}$ является правым идеалом системы $W$.*

Доказательство. Покажем индукцией по $h=h(w)$, что при всяких $a_1,\dots,a_m\in A_n$, $n\in I$, $w\in W_m$, $m\in I$, имеем $a_1\dots a_m w\in A_n$. Пусть $h(w)=1$.

При $w\in B_n$ утверждение следует из того, что $A$ — правый идеал системы $B$. Если $m=k$, $w=\underset{i}{\varepsilon^{\eta}}$, $\eta>0$ или $w=c^1_j$, то ввиду того, что согласно п. 1 леммы 2 элементы $a_1,\dots,a_k$ имеют с.о.д., по III.2.3 $a_1\dots a_k \overset{1}{c_j} = a_1\dots a_k \overset{0}{c_j}\in A_n$; $a_1\dots a_k\varepsilon_i = a_i\in A_n$. Этим утверждение при $h=1$ доказано.

Пусть натуральное число $h_0>1$, $h(w)=h_0$ и утверждение уже доказано во всех случаях, когда $h(w)<h_0$. Если $w=w_1\dots w_e v$, то ввиду $\max\limits_i h(w_i)<h_0$, $h(v)=1<h_0$ имеем по предположению индукции, что $a_1\dots a_m w = a_1\dots a_m(w_1\dots w_e v) = (a_1\dots a_m w_1)\dots(a_1\dots a_m w_e)v\in A_n$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если конгруэнция $\varrho$ системы Менгера $W$ индуцирует на подмножестве $X$* (см. (5)) *ненулевую конгруэнцию, то $\varrho$ индуцирует ненулевую конгруэнцию и на подсистеме $B$ системы $W$.*

Доказательство. Покажем, что если существуют $w_1, w_2\in X$, $w_1\neq w_2$, такие, что $w_1\varrho w_2$, то существуют и $b_1, b_2\in B$, $b_1\neq b_2$, такие, что $b_1\varrho b_2$. Переберем все возможные случаи.

1. $w_1=c^1_1$, $w_2=c^1_2$. Здесь $\varepsilon^0_1\dots\varepsilon^0_k c^1_1 = c^0_1$, $\varepsilon^0_1\dots\varepsilon^0_k c^1_2 = c^0_2$, следовательно, $c^0_1\varrho c^0_2$.

2. $w_1=c^1_1$, $w_2=\varepsilon^{\eta}_j$. Здесь $\varepsilon^0_1\dots\varepsilon^0_k c^1_1 = c^0_1$, $\varepsilon^0_1\dots\varepsilon^0_k\varepsilon^{\eta}_j=\varepsilon^{\eta}_j$, следо-

вательно, $c^0_1 \varrho \varepsilon^{\eta}_j$ и ввиду $c^1_1 \varrho \varepsilon^{\eta}_j$ приходим к случаю $c^1_1 \varrho c^0_1$, разобранному в следующем пункте.

3. $w_1 = c^1_1$, $w_2 \in B_k$. Если $w_2 \neq c^0_1$, то $\varepsilon^0_1 \ldots \varepsilon^0_k c^1_1 = c^0_1$, $\varepsilon^0_1 \ldots \varepsilon^0_k w_2 = w_2$ и $c^0_1 \varrho w_2$. Если $w_2 = c^0_1$, то $\varepsilon^2_1 \ldots \varepsilon^2_k c^1_1 = c^0_2$, $\varepsilon^2_1 \ldots \varepsilon^2_k c^0_1 = c^0_1$ и $c^0_2 \varrho c^0_1$.

4. $w_1 = \overset{\eta_1}{\varepsilon_i}$, $w_2 = \overset{\eta_2}{\varepsilon_j}$. Если $i \neq j$, то пусть $a_i = \overset{0}{c}_1$, $a_j = \overset{0}{c}_2$, $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_k \in A_k$. Так как согласно п. 1 леммы 2 элементы $a_1, \ldots, a_k$ имеют с. о. д., то $a_1 \ldots a_k \overset{\eta_1}{\varepsilon_i} = a_i = \overset{0}{c}_1$, $a_1 \ldots a_k \varepsilon^{\eta_2}_j = a_j = c^0_2$ и $c^0_1 \varrho c^0_2$. Если $w_1 = \varepsilon^1_j$, $w_2 = \varepsilon^2_j$ то $\varepsilon^0_1 \ldots \varepsilon^0_{j-1} \varepsilon^1_j \varepsilon^0_{j+1} \ldots \ldots \varepsilon^0_k c^1_1 = c^0_1$, $\varepsilon^0_1 \ldots \varepsilon^0_{j-1} \varepsilon^2_j \varepsilon^0_{j+1} \ldots \varepsilon^0_k c^1_1 = c^0_2$ и $c^0_1 \varrho c^0_2$. Если $w_1 = \varepsilon^1_j$, $w_2 = \varepsilon^0_j$ то $\varepsilon^0_1 \ldots \varepsilon^0_{j-1} \varepsilon^1_j \varepsilon^0_{j+1} \ldots \varepsilon^0_k c^1_2 = c^0_1$, $\varepsilon^0_1 \ldots \varepsilon^0_{j-1} \varepsilon^0_j \varepsilon^0_{j+1} \ldots \varepsilon^0_k c^1_2 = c^0_2$ и $c^0_1 \varrho c^0_2$.

5. $w_1 = \overset{1}{\varepsilon_j}$, $w_2 \in B_k$. Случай $w_2 = \overset{0}{\varepsilon_j}$ разобран выше; если же $w_2 \neq \overset{0}{\varepsilon_j}$, то $\overset{0}{\varepsilon_1} \ldots \overset{0}{\varepsilon}_{j-1} \overset{1}{\varepsilon_j} \overset{0}{\varepsilon}_{j+1} \ldots \overset{0}{\varepsilon_k} \overset{0}{\varepsilon_j} = \overset{0}{\varepsilon_j}$; $\overset{0}{\varepsilon_1} \ldots \overset{0}{\varepsilon}_{j-1} w_2 \overset{0}{\varepsilon}_{j+1} \ldots \overset{0}{\varepsilon_k} \overset{0}{\varepsilon_j} = w_2$ и $w_2 \varrho \overset{0}{\varepsilon_j}$.

Так как $w_1$ и $w_2$, а также $\overset{1}{c}_1$ и $\overset{1}{c}_2$, $\overset{1}{\varepsilon_j}$, $\overset{2}{\varepsilon_j}$ равноправны, то по соображениям симметрии больше случаев рассматривать не надо. Лемма доказана.

Пусть $\Theta$ — максимальная конгруэнция системы $W$, разделяющая элементы множества $X$, и пусть $C = W/\Theta$. Так как $\Theta$ не склеивает никаких двух различных элементов множества $X$ и $B \subseteq X$, то $B$ можно естественным образом рассматривать как собственную подсистему системы $W$, причем из леммы 4 следует, что $A$ является правым идеалом системы $C$. Из определения ясно, что всякая ненулевая конгруэнция системы $C$ является ненулевой и на подмножестве $X$, следовательно, в силу леммы 4 и на подсистеме $B \subseteq X$. Теорема 3 доказана.

При $I = J = H = \{1\}$ из теоремы 3 вытекает

Следствие. *Никакая полугруппа с равнодействующими справа элементами не может быть плотно вложенным идеалом никакой полугруппы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеврин Л. Н., Плотно вложенные идеалы полугрупп. Матем. сб., 79, 425 (1969).
2. Хион Я. В., $m$-арные $\Omega$-кольцоиды. Сиб. матем. ж., 8, № 1, 174 (1967).
3. Grätzer G., Universal Algebra, Pennsylvania, 1966.

*Таллинский политехнический институт*

Поступила в редакцию
29/X 1971

*J. HENNO*

**MENGERI SÜSTEEMIDE TIHEDALT SISESTATUD PAREMPOOLSED IDEAALID**

Töös on leitud tarvilikud tingimused selleks, et Mengeri süsteem $A$ oleks süsteemi $B$ klassis $\mathfrak{M}(H)$ tihedalt sisestatud parempoolne ideaal, kus $\mathfrak{M}(H)$ on kõigi Mengeri süsteemide $A = \{A_n, n \in I\}$ klass, milles $I \leqslant H$.

*J. HENNO*

**DENSELY EMBEDDED RIGHT IDEALS OF MENGER SYSTEMS**

The necessary conditions are found for Menger system $A$ to be densely embedded right ideal in Menger system $B$.