EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.2.22

УДК 512.25/.26 + 519.3 : 330.115

Э. РАЙК

О ФУНКЦИИ КВАНТИЛЯ В СТОХАСТИЧЕСКОМ НЕЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

E. RAIK. KVANTIILFUNKTSIOONIST STOHHASTILISES MITTELINEAARSES PROGRAMMEERIMISES

E. RAIK. ON QUANTILEFUNCTION IN STOCHASTIC NON-LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

Рассмотрим следующую функцию

$$w_\alpha(x) = \min\{y \in R^1 : P[f(x,\xi) \leqslant y] \geqslant \alpha\},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{1}$$

где $f(x,\xi)$ — действительная функция от вектора x и от случайного вектора ξ. Функция $w_\alpha(x)$ является функцией квантиля порядка α для $f(x,\xi)$ и применяется в задачах стохастического нелинейного программирования в качестве функции цели или ограничения.

Символ min в формуле (1) оправдан, поскольку функция $P[f(x,\xi) \leqslant y]$ является непрерывной справа и неубывающей. Отметим, что ограничение $w_\alpha(x) \leqslant \beta$ является эквивалентным ограничению $v_\beta(x) \geqslant \alpha$, где $v_\beta(x) = P\,[f(x,\xi) \leqslant \beta]$ и поэтому одно ограничение можно всегда заменить другим.

В работе [1] приведены основные теоремы нелинейного программирования. Там же, в частности, сделана попытка провести исследование свойств функции $v_\beta(x)$.

Оказывается, что функция $w_\alpha(x)$ легко определяется в случае сепарабельной функции $f(x,\xi) = f_1(x) + f_2(\xi)$. В этом случае имеем

$$w_\alpha(x) = \min\{y \in R^1 : P\,[f_2(\xi) \leqslant y - f_1(x)] \geqslant \alpha\}.$$

Обозначим

$$\min\{y \in R^1 : P\,[f_2(\xi) \leqslant y] \geqslant \alpha\} = y^*,$$

т. е.

$$P\,[f_2(\xi) \leqslant y^*] \geqslant \alpha, \quad P\,[f_2(\xi) \leqslant y^* - \varepsilon] < \alpha, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда получим

$$w_\alpha(x) = y^* + f_1(x), \tag{2}$$

$$y^* = \min\{y \in R^1; P[f_2(\xi) \leqslant y] \geqslant \alpha\}.$$

Это замечательное свойство квантиля $w_\alpha(x)$ для функции $f(x,\xi) = f_1(x) + f_2(\xi)$ позволяет нам, определив один раз значение y^*, в дальнейшем работать с детерминированной функцией $w_\alpha(x) = y^* + f_1(x)$. Следовательно, общие свойства $w_\alpha(x)$ совпадают с соответствующими свойствами функции $f_1(x)$. В этом смысле функции $w_\alpha(x)$ и $v_\beta(x)$ существенно различаются. Рассмотрим в качестве сравнения условия строгой квазивогнутости функции $v_\beta(x)$ для сепарабельной функции $f(x,\xi) = f_1(x) + f_2(\xi)$.

Будем использовать определение, где строго квазивогнутой функцией называется функция, удовлетворяющая условию

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \min(g(x_1), g(x_2)), x_1 \neq x_2. \quad (3)$$

Перепишем значение квантиля для строго квазивыпуклой сепарабельной функции $f(x, \xi)$

$$v\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = P\left[f_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \beta - f_2(\xi)\right] =$$

$$= P\left[f_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \beta - f_2(\xi) < \max(f_1(x_1), f_1(x_2))\right] +$$

$$+ P[\max(f_1(x_1), f_1(x_2)) \leqslant \beta - f_2(\xi)] =$$

$$= P\left[f_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \beta - f_2(\xi) < \max(f_1(x_1), f_1(x_2))\right] +$$

$$+ \min(v(x_1), v(x_2)).$$

Для строгой квазивогнутости $v(x)$ во всем пространстве необходимо, чтобы $P\left[f_1\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \beta - f_2(\xi) < \max(f_1(x_1), f_1(x_2))\right] > 0.$
Это неравенство, в свою очередь, выполняется, если $f_1(x)$ строго квазивыпукла, плотность распределения ξ почти всюду положительна, $f_2(\xi)$ непрерывна и $\sup[\beta - f_2(\xi)] > \sup f_1(x)$, $\inf[\beta - f_2(\xi)] < \inf f_1(x)$.

Для несепарабельной функции $f(x, \xi)$ общие свойства функции $w_\alpha(x)$ вывести весьма трудно. Ограничимся лишь достаточными условиями непрерывности по x функции $w_\alpha(x)$.

Докажем сперва одно полезное свойство функции $w_\alpha(x)$.

Лемма. *Функция $w_\alpha(x)$ непрерывна слева по α.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\beta_n\}$, сходящуюся слева к $\bar{\alpha}$. Поскольку $w_\alpha(x)$ — неубывающая по α функция, то имеем $w_{\beta_n}(x) \leqslant w_{\beta_m}(x) \leqslant w_{\bar{\alpha}}(x)$, $n \leqslant m$ и, следовательно, $w_{\beta_n}(x)$ сходится.

Вопреки утверждению леммы допустим $\lim\limits_{n\to\infty} w_{\beta_n}(x) = \gamma < w_{\bar{\alpha}}(x)$.
Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} w_{\beta_n}(x) = \gamma < w_{\bar{\alpha}}(x) - \varepsilon. \quad (4)$$

С другой стороны, по определению $w_\alpha(x)$ имеем $P[f(x, \xi) \leqslant w_{\bar{\alpha}}(x) - \varepsilon] = a < \bar{\alpha}$ и по выбору последовательности $\{\beta_n\}$ существует N такое, что для $n \geqslant N$ $a < \beta_n < \bar{\alpha}$. Поскольку β_n невозрастающая, то

$$w_{\bar{\alpha}}(x) - \varepsilon \leqslant w_{\beta_n}(x) \leqslant \gamma, \; n \geqslant N,$$

а это противоречит неравенству (4). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} w_{\beta_n}(x) = w_{\bar{\alpha}}(x)$.

Теорема. *Если функция $f(x, \xi)$ непрерывна по совокупности аргументов, то квантиль $w_\alpha(x)$ является непрерывной функцией по x.*

Доказательство. Рассмотрим точку $\bar{x}$ и пусть значение квантиля в ней равняется $w_\alpha(\bar{x}) = \min\{y \in R^1, \; P[f(\bar{x}, \xi) \leqslant y] \geqslant \alpha\}$. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется ограниченное замкнутое множество K такое, что $P[\xi \in K] \geqslant 1 - \varepsilon$. Непрерывная функция $f(x, \xi)$ является равномерно непрерывной на множестве $U \times K$, где

$$U = \{x : \|x - \bar{x}\| \leqslant \gamma, \gamma > 0\}.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|f(x, \xi) - f(\bar{x}, \xi)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad \|x - \bar{x}\| \leqslant \delta.$$

Выберем любое $\tilde{x}$, $\|\tilde{x} - \bar{x}\| \leqslant \delta$, и введем множества

$$Q_{\tilde{x}} = \{\xi : f(\tilde{x}, \xi) \leqslant w_\alpha(\tilde{x})\} \text{ и } Q_{\bar{x}} = \{\xi : f(\bar{x}, \xi) \leqslant w_\alpha(\bar{x})\}.$$

В этом случае согласно выбору K имеем

$$P[\xi \in Q_{\bar{x}} \cap K] \geqslant \alpha - \varepsilon \text{ и } P[\xi \in Q_{\tilde{x}} \cap K] \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

На множестве $K \cap Q_{\bar{x}}$

$$f(\tilde{x}, \xi) \leqslant f(\bar{x}, \xi) + \varepsilon \leqslant w_\alpha(\bar{x}) + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$P[f(\tilde{x}, \xi) \leqslant w_\alpha(\bar{x}) + \varepsilon] \geqslant P[\xi \in K \cap Q_{\bar{x}}] \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

Поскольку

$$w_{\alpha-\varepsilon}(\tilde{x}) = \min\{y \in R^1, P[f(\tilde{x}, \xi) \leqslant y] \geqslant \alpha - \varepsilon\},$$

то

$$w_\alpha(\bar{x}) + \varepsilon \geqslant w_{\alpha-\varepsilon}(\tilde{x}).$$

Аналогичной выкладкой получаем, что

$$w_\alpha(\tilde{x}) + \varepsilon \geqslant w_{\alpha-\varepsilon}(\bar{x})$$

или

$$\begin{aligned} w_\alpha(\bar{x}) &\geqslant w_{\alpha-\varepsilon}(\tilde{x}) - \varepsilon, \\ w_\alpha(\tilde{x}) &\geqslant w_{\alpha-\varepsilon}(\bar{x}) - \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

Так как ε — любое число и по лемме $w_\alpha(x)$ непрерывна слева, то из неравенств (5) следует непрерывность $w_\alpha(x)$ по x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Райк Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 8 (1971).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/XII 1970